

# 硕士学位论文

非厄米体系中的量子反常和量子纠缠研究

RESEARCHES ON QUANTUM ANOMALIES AND  
QUANTUM ENTANGLEMENT IN  
NON-HERMITIAN SYSTEMS

研 究 生：易伟柱

指 导 教 师：陈伟强副教授

南方科技大学

二〇二三年四月

国内图书分类号：TM301.2

国际图书分类号：62-5

学校代码：14325

密级：公开

## 理学硕士学位论文

# 非厄米体系中的量子反常和量子纠缠研究

学位申请人：易伟柱

指导教师：陈伟强副教授

学科名称：凝聚态物理

答辩日期：2023年5月

培养单位：物理系

学位授予单位：南方科技大学

Classified Index: TM301.2

U.D.C: 62-5

Thesis for the degree of Master of Science

# **RESEARCHES ON QUANTUM ANOMALIES AND QUANTUM ENTANGLEMENT IN NON-HERMITIAN SYSTEMS**

<b>Candidate:</b>	Yi Weizhu
<b>Supervisor:</b>	Associate Professor Wei-Qiang Chen
<b>Speciality:</b>	Condensed Matter Physics
<b>Date of Defence:</b>	May, 2023
<b>Affiliation:</b>	Department of Physics
<b>Degree-Confering- Institution:</b>	Southern University of Science and Technology

## 学位论文公开评阅人和答辩委员会名单

公开评阅人名单

答辩委员会名单

# 南方科技大学学位论文原创性声明和使用授权说明

## 南方科技大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师指导下独立进行研究工作所取得的成果。除了特别加以标注和致谢的内容外，论文中不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本人的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确的说明。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日期：

## 南方科技大学学位论文使用授权书

本人完全了解南方科技大学有关收集、保留、使用学位论文的规定，即：

1. 按学校规定提交学位论文的电子版本。
2. 学校有权保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的电子版，允许论文被查阅。
3. 在以教学与科研服务为目的前提下，学校可以将学位论文的全部或部分内容存储在有关数据库提供检索，并可采用数字化、云存储或其他存储手段保存本学位论文。
  - (1) 在本论文提交当年，同意在校园网内提供查询及前十六页浏览服务。
  - (2) 在本论文提交 ☐ 当年/☐ 一年以后，同意向全社会公开论文全文的在线浏览和下载。
4. 保密的学位论文在解密后适用本授权书。

作者签名：

日期：

指导教师签名：

日期：

## 摘 要

在物理学领域中，放弃厄米性作为一种新的思维尝试备受关注。虽然在经典物理中，这种做法相对来说比较自然，但推广到量子物理层面却不那么容易理解。本文从三个不同的方面研究非厄米性在量子物理中带来的非平凡效应，探索其深层次的物理内涵和应用。

首先，我们采用非厄米性作为一种不寻常的方式来解决手征费米子问题，这是一个长期以来未能解决的难题。通过计算谱流、指标定理和手征模的含时演化，我们详细地检查了该模型的手征反常和引力反常，并证明了我们的模型可以实现手征费米子的格点化。

其次，我们探索了非厄米物理中一个重要而又奇特的概念——奇异点在能谱中所带来的效应。与一般的研究方式不同，我们采用能谱中存在奇异点时的纠缠熵以及纠缠谱作为探测奇异点行为的指标。我们发现，能谱中的奇异点往往与（实的）非么正的共形场论以及复数共形场论有联系，它们分别标志着宇称-时间对称性自发破缺的二级相变和某种尚不明确的一级相变。这为我们理解非厄米的量子临界行为和一些一级相变理论提供了新的思路。

最后，我们探讨了非厄米模型的含时演化问题，这是在开放量子系统下进行的。通过一个通用模型含时纠缠熵的计算，我们发现，即使在有相互作用的情况下，一维费米液体的短时间热化过程具有比较普适的特性。而长时间的衰减行为则取决于刘维尔谱的“能隙”，这对于开放量子多体系统的研究具有很强的指导意义。

**关键词：**非厄米；纠缠熵；共形场论；手征费米子；主方程

## Abstract

The abandonment of Hermiticity as a novel approach has garnered significant attention in the field of physics. While the abandonment of Hermiticity may seem relatively natural within classical physics, its extension to the quantum level poses nontrivial challenges to intuition. In this thesis, we investigate non-Hermiticity from three distinct perspectives, exploring the nontrivial effects that arise at the quantum level and uncovering the deeper implications and potential applications of non-Hermitian physics.

First, we employ non-Hermiticity as an unconventional means of addressing the long-standing problem of chiral fermions. Through the calculation of spectral flow, index theorems and the time-dependent evolution of chiral modes, we examine the chiral and gravitational anomalies of our model, demonstrating the lattice realization of chiral fermions through our approach. Next, we investigate the effects of exceptional points in energy spectra, a particularly important and intriguing concept in non-Hermitian physics. In contrast to conventional approaches, we utilize the entanglement entropy and spectrum as indicators of exceptional behavior. We find that exceptional points in energy spectra are often related to (real) non-unitary conformal field theories and complex conformal field theories, respectively marking second order phase transitions resulting from spontaneous breaking of parity-time symmetry and some as-yet unclear first-order phase transition.

Finally, we consider the issue of time-dependent evolution in non-Hermitian models within the context of open quantum systems. Through the calculation of time-dependent entanglement entropy in a generic model, we demonstrate that the short-time thermalization process of a one-dimensional fermi liquid has universal characteristics even with interactions. The long-time decay behavior, however, depends on the "gap" in the Liouvillian spectrum. This has strong guiding significance for the study of open quantum many-body systems.

**Keywords:** non-Hermitian; entanglement entropy; conformal field theory; chiral fermion; master equation

# 目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
符号和缩略语说明.....	V
第 1 章 非厄米物理简介.....	1
1.0.1 非厄米量子力学.....	2
1.0.2 赝厄米, 准厄米及相似变换.....	3
1.0.3 非厄米对称性.....	6
1.0.4 奇异点.....	8
1.0.5 非厄米能带理论.....	11
1.0.6 开放系统方法.....	13
1.1 纠缠熵.....	16
1.1.1 纠缠熵的定义.....	17
1.1.2 纠缠谱.....	18
1.1.3 面积律.....	19
1.1.4 自由费米子方法.....	21
1.2 一维相互作用费米子体系的解析方法.....	23
1.2.1 玻色化.....	23
1.2.2 二维共形场论.....	29
1.3 总结及与其他章节的联系.....	35
第 2 章 $1+1$ 维手征费米子的非厄米格点模型.....	36
2.1 简介.....	36
2.2 手征费米子手征反常和引力反常简介.....	37
2.2.1 手征反常.....	38
2.2.2 引力反常.....	39
2.3 格点模型及其能谱.....	40
2.4 手性和手征对称性.....	43
2.4.1 能谱流.....	44
2.4.2 指标定理.....	45

2.5 引力反常 .....	48
2.6 在局域扰动下的稳定性 .....	49
2.7 讨论与总结 .....	50
<b>第 3 章 非厄米费米子模型中的奇异纠缠 .....</b>	<b>52</b>
3.1 简介 .....	52
3.2 双正交纠缠熵 .....	54
3.3 非厄米模型和具有奇异点的量子纠缠 .....	55
3.3.1 一般模型 .....	55
3.3.2 具有线性色散的奇异点 .....	57
3.3.3 具有平方根色散的奇异点 .....	62
3.3.4 奇异点与能隙关闭点并存 .....	66
3.4 纠缠谱和准粒子纠缠图像 .....	66
3.5 相关的非厄米自旋-1/2 链 .....	68
3.6 总结与讨论 .....	71
<b>第 4 章 开放一维费米子液体熵的含时演化 .....</b>	<b>77</b>
4.1 简介 .....	77
4.2 模型选取 .....	78
4.3 熵的含时演化 .....	80
4.4 动量空间问题 .....	83
4.5 总结和讨论 .....	84
<b>结 论 .....</b>	<b>85</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>86</b>
<b>致 谢 .....</b>	<b>112</b>
<b>个人简历、在学期间完成的相关学术成果 .....</b>	<b>113</b>

## 符号和缩略语说明

NH	non-Hermitian 非厄米
NU	non-unitary 非么正
$\mathcal{PT}$	parity-time-reversal (operator,symmetry) 宇称-时间反演 (算符, 对称性)
$\mathcal{C}$	charge conjugate (operator,symmetry) 荷共轭 (注意: 只对于量子场论而言, 它是荷共轭; 在其他场合则有不同的表现形式, 例如在凝聚态物理中, $\mathcal{C}$ 被称为粒子-空穴共轭。)
TRS	time reversal symmetry 时间反演对称性
PHS	particle-hole symmetry 粒子-空穴对称性
CS	chiral symmetry 手征对称性 (在一定情况下对应于次晶格对称性)
SPT	symmetry-protected topological (phase) 对称性保护拓扑相
TQFT	topological quantum field theory 拓扑量子场论
EP	exceptional point 奇异点
LCP	level crossing point (diaboloic point) 能带交叉点 (能隙关闭点)
QP	quasi-particle 准粒子
SEP	spectral exceptional point 能谱奇异点
NHSE	non-Hermitian skin effect 非厄米趋肤效应
FGKSLME	Franke – Gorini – Kossakowski – Sudarshan – Lindblad master equation (通常简写为 Lindblad master equation) 林德布拉德主方程
$\mathcal{L}$	Liouvillian 刘维尔量
EE	entanglement entropy 纠缠熵
ES	entanglement spectrum 纠缠谱
SVD	singular value decomposition 奇异值分解
TFDS	thermofield double state 热场双重态
TN	tensor network 张量网络
MPS	matrix product state 矩阵乘积态
PEPS	projected entangled-pair state 投影纠缠对态
AMERA	multi-scale entanglement renormalization ansatz 多尺度纠缠重整化算法

CFT	conformal field theory	共形场论
cCFT	complex conformal field theory	复共形场论
$E_F$	Fermi energy	费米能量
MI	mutual information	互信息
YL	Yang-Lee (model)	杨李模型
LG	Landau-Ginzburg (theory)	朗道-金兹堡 (理论)
RG	renormalization group	重整化群
DQCP	deconfined quantum critical point	退禁闭量子临界点
RSOS	restricted solid-on-solid (model)	受限实体对实体 (模型)
TFIM	transverse-field Ising model	横场伊辛模型
OBC	open boundary condition	开放边界条件
PBC	periodic boundary condition	周期边界条件
APBC	anti-periodic boundary condition	反周期边界条件
BdG	Bogoliubov-de-Gennes	波戈留波夫-德-热内
EoF	entanglement of formation	纠缠形成度
$\mathcal{C}$	concurrence	协方差
SSH	Su-Schrieffer-Heeger (model)	苏-施里弗-黑格 (模型)
ASIT	Atiya-Singer index theorem	阿蒂亚-辛格指标定理
MSEE	momentum space entanglement entropy	动量空间纠缠熵

## 第 1 章 非厄米物理简介

厄米性是量子力学的一条基本假设，其要求任何力学算符都是自伴随的，即它们的厄米共轭是它们本身。特别地，哈密顿量的厄米性确保了能量期望值是实数，并且保证了体系的概率流守恒，进而可以导出粒子数、能量和信息的守恒。然而，以上都是由于我们假设了一个绝对孤立的理想系统才得出来的结论。事实上，任何系统都会与其环境产生联系。至少，当我们想要了解一个量子系统时，测量本身就是系统和环境的相互作用。当这种联系（物质、能量或信息交换）相对于我们关心的体系足够弱时，我们还是可以继续沿用厄米的量子力学。而当这种交换足够强时，抑或我们需要研究大系统中的一个子系统时，孤立系统的厄米量子力学便不再适用。历史上，伽莫夫（Gamow<sup>[1]</sup>）、西格特（Siebert<sup>[2]</sup>）、马约拉纳（Majorana<sup>[3]</sup>）和费斯巴赫（Feshbach<sup>[4]</sup>）等人最早采用了有效的非厄米哈密顿量分析原子核衰变问题。研究表明，存在流向核外的非零概率流。沿着这一思路，人们对类似的单个或几个态的共振和衰变现象有了很好的理解。随后，量子光学的发展又使得人们能够对少体系统进行高度可控的操作。如此一来，研究开放量子系统的理论框架被相继建立。

一般来说，研究开放量子体系，量子态的概念将由密度矩阵取代。薛定谔方程中作用于量子态的厄米哈密顿量被支配密度矩阵时间演化的刘维尔（Liouvillian）超算子所取代<sup>[5]</sup>。在某些情况下，这种与环境接触的开放系统可以用林德布莱德（Lindblad）量子主方程<sup>[5-7]</sup>、费曼-弗农（Feynman and Vernon）理论<sup>[8]</sup>或凯尔迪什（Keldysh）非平衡态量子场论<sup>[9]</sup>等方法准确描述。当然，这些方法都是在采取一定的近似下的有效描述。例如林德布莱德主方程则要求系环境是满足马尔可夫假设的。而且，即便是有了上述强有力的方法，在面对很多问题时，上述方法带来的巨大复杂度也让人望而却步。

有效非厄米哈密顿量则提供了一个概念上更简单和直观的方法来用于理解量子开放体系的某些特定问题。一方面，历史上的先驱们为我们展示了非厄米哈密顿量在研究少量量子比特系统时的妙用。在另一方面，非厄米哈密顿量描述也被应用于各种非保守的经典系统，例如有耗散或者增益的光学<sup>[10-15]</sup>、电子电路<sup>[16]</sup>、机械系统<sup>[17-18]</sup>、声学系统<sup>[19-22]</sup>等。在量子力学中，薛定谔方程揭示了单粒子波函数和经典波动方程之间的形式上的等价性。而在固体物理学中，由于周期性结构，能带理论则完全适用这种经典与量子的等价性。因此，在非厄米经典波研究的激励

下，非厄米能带理论<sup>[23-40]</sup>也在近些年被逐渐发展起来，尤其是非厄米的拓扑物态。这些研究极大的丰富和扩充了凝聚态物理学中的能带理论所适用的范围。

此外，非厄米性也启发了纯理论工作<sup>①</sup>。例如，统计物理中的杨李模型或称杨李边缘奇点<sup>[41-42]</sup>。杨李最早意识到了在二维伊辛模型中，将磁场解析延拓到复平面将得到一个不平常的相变临界点<sup>[43-44]</sup>。事实上，这个临界点的磁场落在了虚轴上。这就意味着体系的哈密顿量成了非厄米的。也就是说，在非厄米的模型中会产生崭新的物理。后来，在量子场论发展成熟后，非么正量子场论<sup>[45-51]</sup>的研究（即拉格朗日量的非厄米性）也带来了很多新的结论。也有不少理论家尝试从非厄米的角度解释量子引力<sup>[52-57]</sup>等基本问题。

在本节中，为了让读者对非厄米物理有一个基本的了解。我们将依次介绍非厄米量子力学、宇称-时间对称性、奇异点、非厄米能带理论和开放量子体系的主方程方法等概念。其中一些基本的结论将在接下来的章节中被直接使用而不再做介绍。

### 1.0.1 非厄米量子力学

要讨论非厄米量子力学，事实上，我们要做的事情就是将厄米量子力学的线性代数一般化，并赋予其适当的物理意义。

在厄米量子力学中，我们首先需要有一个线性空间，即希尔伯特空间  $\mathcal{H}$ ，以及找到一组完备的基  $|u_k\rangle$ ，并满足正交归一条件  $\langle u_k | u_l \rangle = \delta_{k,l}$ 。从而量子态可以定义为上述基的线性叠加。并且，所有的物理可观测量都被描述为作用在此空间上的自伴随算符。厄米哈密顿量的特殊之处在于，它的所有本征态能够构成一组基，即

$$\mathbb{I} \equiv \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{\langle\psi_n|\psi_n\rangle} \quad (1-1)$$

这是由正交归一性和完备性决定的。而当哈密顿量非厄米时，它的所有本征态并不能满足正交归一条件。为了解决正交归一的困难，我们尝试从结论出发来逆推所需缺少的条件。已知：

(1) 作用于  $\mathcal{H}$  上的非厄米哈密顿量  $H$ ，及其本征态和本征能量， $H|\psi_n^0\rangle = \varepsilon_n|\psi_n^0\rangle$ 。这里暂不考虑奇异点等特殊情况。

(2)  $\langle\psi_m^1|\psi_n^0\rangle = \delta_{m,n}$ ，即新的正交归一条件，其中  $|\psi_m^1\rangle$  为  $\mathcal{H}$  中的另一组矢量。

① 这里的非厄米性，是最基本的非厄米构造方法，即将原本物理上是实数的物理量扩充到复数域。

我们注意到

$$\varepsilon_n \langle \psi_m^1 | \psi_n^0 \rangle = \langle \psi_m^1 | H | \psi_n^0 \rangle, \quad (1-2)$$

而且

$$\varepsilon_n \delta_{m,n} = \varepsilon_m \delta_{m,n} = \varepsilon_m \langle \psi_m^1 | \psi_n^0 \rangle \quad (1-3)$$

若令  $\langle \psi_m^1 | H | \psi_n^0 \rangle = \varepsilon_m \langle \psi_m^1 | \psi_n^0 \rangle$ ，则正交归一条件满足。对上式取厄米共轭操作，即

$$\langle \psi_n^0 | H^\dagger | \psi_m^1 \rangle = \varepsilon_m^* \langle \psi_n^0 | \psi_m^1 \rangle \quad (1-4)$$

从而我们发现，需要两组基来满足正交归一条件，我将  $H$  的本征矢  $|\psi_n^0\rangle$  构成的基称作右矢  $|u_\beta^R\rangle$ ，将  $H^\dagger$  的本征矢  $|\psi_n^0\rangle$  构成的基称作左矢  $|u_\alpha^L\rangle$ 。  $\langle u_\alpha^L | u_\beta^R \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ ，且

$$\mathbb{I} \equiv \sum_\alpha \frac{|u_\alpha^L\rangle \langle u_\alpha^R|}{\langle u_\alpha^L | u_\alpha^R \rangle} \quad (1-5)$$

我们将上式两组基称为双正交基。从而任意可观测量的期望值为  $\langle O \rangle = \langle \psi^L | O | \psi^R \rangle$ ，这样一来，我们相当于在希尔伯特空间重新定义了基来使得非厄米量子力学自洽。关于左右本征矢，在纯理论物理的角度，我们可以用度规或某种虚的规范变换去理解。

关于某些可观测量为复数的问题，例如虚的能量，在凝聚态中其实有很好的理解。因为在处理无序和相互作用体系时，自能出现的虚部即可理解为准粒子的寿命。自此，我们完成了非厄米量子力学的初步建立。

### 1.0.2 赝厄米，准厄米及相似变换

这一小节我们讨论非厄米哈密顿量与厄米哈密顿量的联系。我们首先从一个厄米的哈密顿量出发，

$$H |\psi_n\rangle = \varepsilon_n |\psi_n\rangle \quad (1-6)$$

这里我们已经将本征态归一化，即  $\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \mathbb{I}$ ，且  $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{m,n}$ 。从而哈密顿量可以写成

$$H = \sum_n \varepsilon_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1-7)$$

对其做一个相似变换

$$\tilde{H} = S H S^{-1} \quad (1-8)$$

其中  $S$  是一个线性可逆算符,  $\tilde{H}$  则一般是非厄米的。则变换后的本征态变为

$$|\psi_n^0\rangle = S |\psi_n\rangle, |\psi_n^1\rangle = (S^{-1})^\dagger |\psi_n\rangle \quad (1-9)$$

其中  $S$  可以通过下式反表示

$$S = \sum_n |\psi_n^0\rangle \langle \psi_n|, S^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n^1| \quad (1-10)$$

从而有

$$\begin{aligned} \tilde{H} |\psi_n^0\rangle &= S H S^{-1} S |\psi_n\rangle = \varepsilon_n |\psi_n^0\rangle \\ \tilde{H}^\dagger |\psi_n^1\rangle &= (S^{-1})^\dagger H S^\dagger (S^{-1})^\dagger |\psi_n\rangle = \varepsilon_n |\psi_n^1\rangle \end{aligned} \quad (1-11)$$

上述两组基构成双正交基  $\langle \psi_m^1 | \psi_n^0 \rangle = \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{m,n}$ 。非厄米哈密顿量可以写作

$$\tilde{H} = \sum_n \varepsilon_n U |\psi_n\rangle \langle \psi_n| S^{-1} = \sum_n \varepsilon_n |\psi_n^0\rangle \langle \psi_n^1| \quad (1-12)$$

以上我们实际上重复了上一小节的内容。通过相似变换得到的非厄米哈密顿量具有跟原厄米哈密顿量相同的实数能谱, 而且, 不难发现这其中还有一些隐藏的性质。例如,  $|\psi_n^0\rangle$  可以通过一个度规  $\xi = (S^{-1})^\dagger S^{-1}$  来正交归一

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \langle \psi_m^0 | (S^{-1})^\dagger S^{-1} | \psi_n^0 \rangle = \delta_{m,n} \quad (1-13)$$

不难发现

$$\xi = \sum_n |\psi_n^1\rangle \langle \psi_n^1|, \xi^{-1} = \sum_n |\psi_n^0\rangle \langle \psi_n^0| \quad (1-14)$$

事实上, 在我们处理的很多情况下,  $S^\dagger = S$ 。从而度规可以写成  $\xi^{-1} = S^2$  (拟厄米), 这个结论是相当有用的。根据式, 我们有

$$\tilde{H}^\dagger = (S^{-1})^\dagger H S^\dagger = (S^{-1})^\dagger S^{-1} \tilde{H} S S^\dagger = \xi \tilde{H} \xi^{-1} \quad (1-15)$$

如果  $\xi$  是厄米且正定的, 我们就说  $\tilde{H}$  是赝厄米的。显然赝厄米哈密顿量的能谱一定是实的, 因为上述等式均可逆推。可以证明的是赝厄米是实能谱的充分必要条件。有兴趣的读者可以参考<sup>[58]</sup>。若我们将上式放松, 即  $\xi$  不一定可逆,  $\tilde{H}^\dagger \xi = \xi \tilde{H}$ 。这时, 我们称  $\tilde{H}$  是准厄米的。以上两个概念是非厄米物理中对哈密顿量的简单归类。为了避免概念的混淆, 相关概念及其性质总结如下表1-1。

这里简单阐述一下  $\mathcal{PT}$ -对称性与上述概念的关系, 因为我们在下一小节看到,  $\mathcal{PT}$ -对称也保证了系统的实谱性, 然而它显然与赝厄米有不同的物理内涵。事实上, 在构建非厄米量子力学时, 位置和动量算符的对易关系难免会发生变形。这种变形可能来源于上述所讨论了的相似变换带来的度规, 在这种情况下是可以理解。另一个方面的困难是需要具有么正时间演化。在  $\mathcal{PT}$ -对称非厄米量子力学中,

	$H^\dagger = S^\dagger S H (S^\dagger S)^{-1} \quad H^\dagger \xi = \xi H \quad H^\dagger = \xi H \xi^{-1}$		
$\xi$ 厄米性	确认	确认	确认
$\xi$ 可逆性	确认	非	确认
$\xi$ 正性	确认	确认	非
定矩阵	确认	确认	—
$H$ 能谱	实	实或复	实
$H$ 归属	伪非厄米	准厄米	赝厄米

表 1-1 非厄米哈密顿量概念详解

通过引入一个新的波函数标量积，即所谓的  $\mathcal{CPT}$  内积，其定义为

$$\langle \psi^1 | \psi^0 \rangle_{\mathcal{CPT}} \equiv \int dx \psi_{\mathcal{CPT}}^1(x) \psi^0(x) \quad (1-16)$$

其中  $\psi_{\mathcal{CPT}}^1 \equiv \int dy \mathcal{C}(x, y) \psi_{\mathcal{PT}}^{1*}(-y)$ ，是用  $\mathcal{C}$  算符定义的。后者可以表示为对所讨论哈密顿量的本征函数  $\phi_n(x)$  的求和，即

$$\mathcal{C}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \phi_n^*(y)$$

使用前文中双正交基，我们可以将  $\mathcal{C}$  算符写成离散形式

$$\mathcal{C} := \sum_n s_n |\psi_n^0\rangle \langle \psi_n^1| \quad (1-17)$$

其中集合  $\{s_1, \dots, s_n\}$  定义了符号。若  $\mathcal{PT}$ -对称，则其还满足

$$[\mathcal{C}, H] = 0, \quad [\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \quad \mathcal{C}^2 = 1 \quad (1-18)$$

在量子场论中的电荷共轭算符也满足这个特性。然而， $\mathcal{C}$  与标准意义下的电荷共轭无关，事实上，由于标准的电荷共轭  $\mathcal{C}$  算符将粒子映射到同一理论中的反粒子，对于由 Schrödinger 方程描述的单体系统，不存在这样的算符。因此， $\mathcal{CPT}$  也不涉及量子场论中众所周知的对称性。此外，在量子场论中，必须满足  $[\mathcal{CPT}, H] = 0$ ，但不是单独满足  $[\mathcal{C}, H] = 0$ 。

有了这些量，我们可以将度规  $\xi$  定义为奇偶算符  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{C}$  算符的乘积  $\xi = \mathcal{PC}$ 。哈密顿量是赝厄米的，则有  $\mathcal{C} = \mathcal{P}\xi$  以及如下的关系等价：

$$H^\dagger = \xi H \xi^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad [H, \mathcal{C}] = 0 \quad (1-19)$$

此外，如果哈密顿量是  $\mathcal{PT}$  对称的，也就是说  $[H, \mathcal{PT}] = 0$ ，那么  $\mathcal{C}$  算符和度规  $\xi$

也是  $\mathcal{PT}$  对称的:

$$[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = [\xi, \mathcal{PT}] = 0. \quad (1-20)$$

尽管哈密顿量的谱的实性可以由该算符的反线性对称性 (例如  $\mathcal{PT}$ ) 保证, 但这时候引入  $\mathcal{C}$  算符会带来冗余的约束, 例如  $\mathcal{C}^2 = 1$ 。

可以证明, (1-16) 式中引入的  $\mathcal{CPT}$  内积实际上与先前讨论的  $\xi$  内积相同

$$\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle_{\mathcal{CPT}} := (\mathcal{CPT}|\Psi\rangle)^\top \cdot |\tilde{\Psi}\rangle = \langle \Psi | \mathcal{PC}\tilde{\Psi} \rangle = \langle \Psi | \xi\tilde{\Psi} \rangle = \langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle_\xi. \quad (1-21)$$

对于有限维系统,  $\mathcal{C}$  算符通常易于计算, 因此可以在确定  $\mathcal{P}$  算符后采用  $\mathcal{CPT}$  内积。

### 1.0.3 非厄米对称性

空间反演 (又称宇称) 和时间反演对称性是物理学中至关重要的离散对称性。它们的作用分别为:

$$\begin{aligned} \text{空间反演 } \mathcal{P} : \hat{x} &\rightarrow -\hat{x}, \hat{k} \rightarrow -\hat{k} \\ \text{时间反演 } \mathcal{T} : \hat{x} &\rightarrow \hat{x}, \hat{k} \rightarrow -\hat{k}, i \rightarrow -i. \end{aligned} \quad (1-22)$$

在非厄米系统中, 增益或耗散的引入使得很多对称性不复存在。然而, 在耗散和增益平衡的系统中, 宇称-时间反演对称性却能够被保留。从上式不难看出, 如果没有虚数单位  $i$  的存在, 单纯时间反演、空间反演以及时间空间反演的组合都不能使得空间坐标或倒空间坐标还原。

人们最早是在经典力学和光学体系认识到  $\mathcal{PT}$  对称性的存在。事实上, 后来本德展示了量子力学中  $\mathcal{PT}$  对称性及其破缺的效应。首先  $\mathcal{PT}$  对称性保证了谱是实的。其证明如下<sup>[59]</sup>:

对于非厄米哈密顿量  $H$  的某个本征态  $|\Psi\rangle$ , 其本征值为  $E$ 。其具有  $\mathcal{PT}$  对称性, 则有

$$[H, \mathcal{PT}] = 0 \quad (1-23)$$

即  $H$  和  $\mathcal{PT}$  共享相同的本征态。不妨令  $\mathcal{PT}|\Psi\rangle = Y|\Psi\rangle$ , 由于  $\mathcal{PT}^2 = \mathbb{I}$ , 则  $Y$  模为 1。另一方面,  $H(\mathcal{PT}|\Psi\rangle) = E(Y|\Psi\rangle) = Y(E|\Psi\rangle) = \mathcal{PT}(H|\Psi\rangle) = E^*Y|\Psi\rangle$ 。即得出  $E = E^*$ 。

$\mathcal{PT}$  对称性的自发破缺则会导致一系列新奇的现象。首当其冲的是实谱的分叉, 即实谱变成复数谱。其量子临界对应的普适类是非么正的。这并不存在于其他对称性自发破缺的量子临界中。此外,  $\mathcal{PT}$  对称性的破缺常常伴随着奇异点的出现, 而奇异点将在下一小节被介绍。

在凝聚态物理中, 对称性的研究一直是个重要议题。尤其是近几十年来对拓扑

物态的研究，催生了对物质态的分类<sup>[60]</sup>。其中，对于对称性保护的拓扑物态来说，最基本的三个对称性，分别为，时间反演对称性，粒子-空穴对称性以及手征对称性（一些情况下等同于次晶格对称性）。其作用于有能隙的二次型的哈密顿量上的定义为时间反演对称性（antiunitary）： $\mathcal{T}H^*\mathcal{T}^{-1} = H$ ；粒子-空穴对称性（antiunitary）： $\mathcal{C}H^*\mathcal{C}^{-1} = -H$ ；手征对称性（次晶格对称性）（unitary） $\Gamma H\Gamma^{-1} = -H$ ，或者写作

$$\begin{aligned}\mathcal{T}H(\mathbf{k}, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= H(-\mathbf{k}, \mathbf{r}) \\ \mathcal{C}H(\mathbf{k}, \mathbf{r})\mathcal{C}^{-1} &= -H(-\mathbf{k}, \mathbf{r}) \\ \Gamma H(\mathbf{k}, \mathbf{r})\Gamma^{-1} &= -H(\mathbf{k}, \mathbf{r})\end{aligned}\tag{1-24}$$

从上式可以看出，有能隙的二次型哈密顿量在对称  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\Gamma$  操作下只有十种可能的转换方式<sup>[60]</sup>。

(1) 时间反演对称性  $\mathcal{T}$ : (a)  $H$  不是时间反演不变（TRS）的，则我们在表中用 0 表示之；(b) 哈密顿量  $H$  是时间反演不变的，而且  $\mathcal{T}$  算子平方等于 1，在这种情况下我们用 1 表示之；(c)  $H$  是时间反演  $\mathcal{T}$  对称的，而且  $\mathcal{T}^2 = -1$ ，我们用  $-1$  表示。

(2) 粒子-空穴对称性  $\mathcal{C}$ 。(a)  $H$  不是粒子-空穴变换不变的，PHS 对应 0；(b) 哈密顿量  $H$  是粒子-空穴变换不变的，而且  $\mathcal{C}$  算子平方等于 1，PHS 对应 1；(c)  $H$  是粒子-空穴变换不变的，而且  $\mathcal{C}$  算子平方等于  $-1$ ，PHS 对应  $-1$ 。

(3) 上述两种对称性操作贡献了 9 种分类。这些还不是所有的十种情况，因为还需要考虑哈密顿量在  $\mathcal{T}\mathcal{C}=\Gamma$  的乘积下的行为。稍加思考就会发现，对于这九种可能性中的八种， $\mathcal{T}\mathcal{C}\Gamma$  的存在与否完全由  $H$  在 TRS 和 PHS 下的转变决定。(如果 CS 不是哈密顿量的对称性，我们就写成 CS=0，如果是，就写成 CS=1)。但在 TRS 和 PHS 都不存在的情况下，存在一种额外的可能性，即 CS 仍然是守恒的，也就是说，CS=0 或 CS=1 都有可能。这就产生了所有 10 种哈密顿的可能行为，如表1-2所示。

上表的分类还可以通过 K 理论给出，该理论是根据矢量丛来分类的，有兴趣的读者可以参考相关文献资料<sup>[60]</sup>。

对于相互作用玻色子体系<sup>①</sup>，上述分类则不再适用。一种分类方式是通过群上调来实现，该方法的详细内容请参考文献<sup>[61-62]</sup>，部分结果请见表1-3。

对于非厄米体系，由于  $H^\dagger$  和  $H$  的不同，这将明显扩充分类类别：一类关于  $H$ ，另一类关于  $H^\dagger$ （或者  $H^T$ ）。值得注意的是，在厄米哈密顿量中明显区别的反么正对称性在非厄米中是统一的。限于篇幅，这里不详细讨论非厄米对称性。部分对称

① 在有相互作用的情况下，费米子和玻色子的表现将十分不一样，一个直观的原因因为玻色子需要强（排斥）相互作用来克服玻色-爱因斯坦凝聚。

class\ $\delta$	T	C	S	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
AIII	0	0	1	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AI	+	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$
D	0	+	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
DIII	-	+	1	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
AII	-	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
CH	-	-	1	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
C	0	-	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
CI	+	-	1	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$

表 1-2 有能隙的非相互作用拓扑体系（拓扑绝缘体和超导体）分类； $\delta := d - D$ ，其中  $d$  是空间维度， $D + 1$  是缺陷的余维（这里  $D = 0$  的情况（即  $\delta = d$ ）对应体拓扑绝缘体和超导体的十重分类）；最左边的列 (A, AIII, ..., CI) 表示费米子哈密顿量的十个对称类。 $\pm 1$  表示的不同类型的时间反转 (T)、粒子空穴 (C) 和手性 (S) 对称性，0 表示不存在。表中条目  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, 2\mathbb{Z}$  表示拓扑非平庸的类型（通常是某个拓扑不变量所属的群），0 表示不存在。 $D = 0$  的情况（即  $\delta = d$ ）对应到有间隙的体拓扑绝缘体和超导体的十重分类。

性会在接下来的章节被详细介绍。关于非厄米相的分类，读者可参考文章<sup>[63-65]</sup>。

当非厄米体系中有相互作用时，事实上，可以看到，拓扑相的不动点理论还是由幺正的 TQFT 描述的，这与某个厄米的相互作用 SPT 相同。即：（局域的）非厄米哈密顿量的玻色 SPT 相的不动点理论与一些厄米的哈密顿量的玻色 SPT 相的不定点相同<sup>[66]</sup>。因此，一般 1+1D 非厄米玻色 SPT 相仍可由第二群上同调  $H^2(G, U(1)_T)$  分类。

#### 1.0.4 奇异点

在线性代数中，我们在参数空间中给定一个（非厄米）矩阵，矩阵元素随参数的变化而变化。我们要求该矩阵在大部分时候是可以被对角化的。而当在参数空间取某些点时，矩阵不能被对角化，只能化成约当块形式，且此时（左和右）特征向量合并。则这些点被称为奇异点。为了能更直观地讨论奇异点，我们考虑一个最简单地例子：一个二能级系统

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon \in \mathbb{C}$$

class\ $d$	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
$U(1) \times \mathbb{Z}_2^T$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2^T$	$\mathbb{Z}_1$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_1$	$\mathbb{Z}_2$
$U(1)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_1$
$SO(3)$	$\mathbb{Z}_1$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_1$
$SO(3) \times \mathbb{Z}_2^T$	$\mathbb{Z}_1$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_1$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_1$
$\mathbb{Z}_2^T \times D_2 = D_{2h}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\mathbb{Z}_2^9$

表 1-3  $d$ （空间）维度中的受一些简单的对称性（由对称群表示）保护的 SPT 的例子。这里  $\mathbb{Z}_1$  表示只有拓扑平庸的相。

其本征值为  $E_{\pm} = \pm\sqrt{\epsilon}$ ，且右和左本征矢为  $\psi_{R,\pm} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\psi_{L,\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\epsilon} \end{pmatrix}$ 。不难发现，当且仅当  $\epsilon = 0$  时， $H$  不能被对角化了，且此时两个本征值和特征向量均合并为一个。与厄米情况下的简并不同，奇异点的能量简并伴随着本征矢的融合，这导致了一系列“病态”的行为，例如，无法定义量子态的模。因此，我们也将此称之为异常简并<sup>[67]</sup>。

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad E_{\pm} = \pm\sqrt{\alpha}$$

$$\psi_{R,\pm} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{L,\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}.$$

奇异点一般具有如下性质：

- (1) 奇异性：例如本征值梯度发散  $|\partial_{\alpha} E(\alpha)| \rightarrow \infty$ ,
- (2) 双正交归一性丧失，因为  $\langle \psi_{L,\pm} | \psi_{R,\pm} \rangle = 0$ ,
- (3) 奇异点维度的丧失， $\psi_{L,\pm}$ ， $\psi_{R,\pm}$  都减少了一个维度，即线性无关的特征矢量的数小于特征多项式的简并度，
- (4) 围绕奇异点的异常行为。例如，对于上述矩阵，我们可以绘制出本征值在参数空间的取值图1-1（黎曼面）。图1-1中可以明显看到分支点和分支切口。在分支点附近取一点，其需要绕两周才能回到原点。这也导致了奇异点的拓扑性质，
- (5) 奇异点附近对参数的敏感性，即参数的略微改变会引起本征值和本征态的剧烈改变，
- (6) 若上述矩阵为哈密顿量，其本征值构成能谱。则动量空间作为参数空

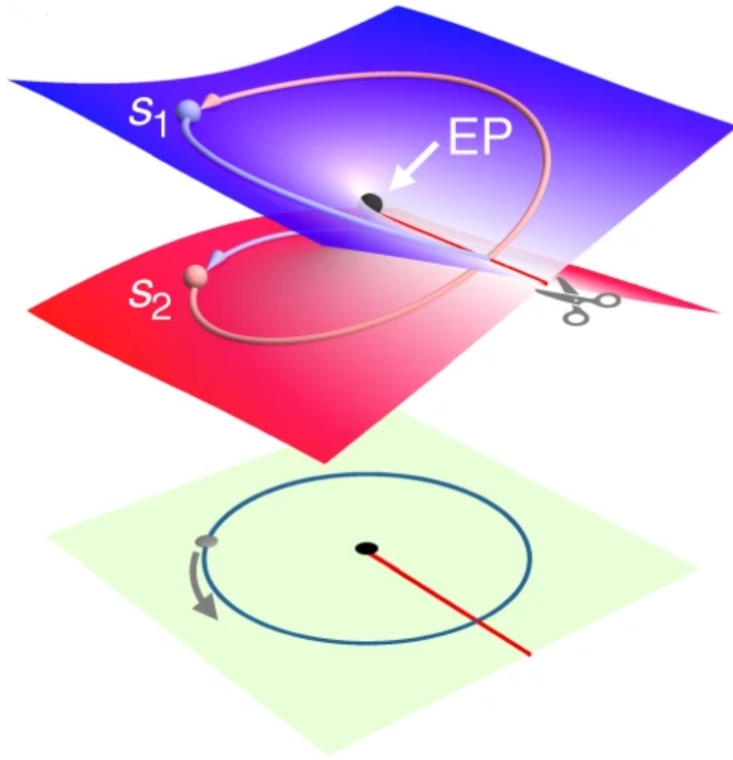


图 1-1 在黎曼面上的奇异点 (EP) 图示: EP (黑色粗点) 为分支点, 红线表示分支切口。 $S_1$  围着 EP 绕一周只能到  $S_2$ 。

间, 其中的奇异点还具有以下性质:

- 在能谱中, 它们对应于能谱奇点;<sup>①</sup>
- 异常的零能模式, 它们对应的态称为病态, 这导致了各种奇异现象<sup>[68]</sup>;
- 由于非厄米费米子加倍定理, 奇异点和费米点都必须在二维中成对出现<sup>[69]</sup>;
- 奇异点对应的态可以在高一维非厄米相中作为类似于费米弧的边界态实现<sup>[70]</sup>;
- 奇异点附近的行为可以用量子信息理论中的技术 (例如保真度) 敏感地探测到<sup>[71]</sup>。

上述我们讨论的例子是最简单的二阶奇异点, 对于更一般的高阶奇异点<sup>[72]</sup>, 其具备以下性质:

- (1) 对于  $N$  阶奇异点, 有  $N$  个本征矢在此融合, 维度减除为  $(N-1)$ ;
- (2) 对于  $N$  阶奇异点, 在其附近本征值的级数展开为  $E_N = \bar{E}_{EP} + \alpha_N (\epsilon - \bar{\epsilon}_{EP})^{1/N} + O[(\epsilon - \bar{\epsilon}_{EP})^{2/N}]$ ;
- (3) 对于  $N$  阶奇异点, 其拓扑数 (一般缠绕数) 为  $(N-1)/N$ ;
- (4) 环绕高阶奇异点 ( $N > 2$ ) 是非阿贝尔的, 即不同路径环绕不互易<sup>[73]</sup>。

① 高维的非厄米体系具有高维的奇异物体, 例如, 在二维非厄米金属态中会有环状奇异物体; 在三维则会有三叶草结或者霍普夫链形状的 (一维) 奇异物体, 当然也会有面状的奇异物体

上述性质在一些驱动-耗散的光学、声学体系<sup>[73-77]</sup>被观测到。由于非厄米体系态天然的会衰变，在真正量子体系观测到奇异点的所有性质仍具有一定挑战性。

### 1.0.5 非厄米能带理论

要讨论非厄米系统的能带理论，我们不妨从一个最小模型<sup>[63-64,78-79]</sup>出发，

$$H = \sum_i (J_L c_i^\dagger c_{i+1} + J_R c_{i+1}^\dagger c_i) \quad (1-25)$$

在上式中， $J_{L,R}$  都是可以在复数域内不限取值的。为了简单起见，我们可以先限定  $J_{L,R}$  为实数。取周期性边界条件，不难得到，

$$E_k = (J_L + J_R) \cos(k) + i (J_L - J_R) \sin(k) \quad (1-26)$$

显然， $E_k$  不必再是实数，除非  $J_L = J_R$ 。在复平面内，其能谱形状为一椭圆，在  $|J_L| = |J_R|$  时退化为一条线段。并且任意变换  $J_{L,R}$  的取值，甚至加入无序或者微扰，其能谱的拓扑形状维持不变，除非在  $|J_L| = |J_R|$  处发生拓扑相变。类比于厄米能带的拓扑理论，我们可以找到一个类似的能隙，如上述例子中的能谱复平面坐标原点，称之为点能隙，并通过该能隙定义一个拓扑缠绕数，

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk \partial_k \ln E_k \quad (1-27)$$

不难发现，缠绕数有  $w = \pm 1$  两个取值，分别对应两个相，在  $|J_L| = |J_R|$  时发生相变。

当然从以上结论并不能直接发掘出物理上的新奇性。事实上，在取周期性边界条件时，即使是非厄米系统，其仍具有平移对称性。但如果取开放边界条件，情况便明显不同。在厄米体系中，布洛赫定理认为在足够长的一维开放链中，体平面波的线性叠加渐近与周期链中的体态相同，即具有渐进平移对称性。而对于非厄米体系，开放的体态不再是自由延伸的平面波。由于左右跳跃的振幅不同，体态将会积累在开链的某一端。这种现象被称为非厄米趋肤效应<sup>[78-80]</sup>。用经典系统能够很直观地演示这一现象。在量子领域，这种想象也会导致很多新奇的效应。

回到上述模型，取开放边界条件，不难解出波函数为  $\langle n | \psi_\alpha^R \rangle \propto \exp(n/2\xi)$ ，其中  $\xi = 1/\ln(J_L/J_R)$ ，为指数衰减形式，区别于厄米的平面波形式  $\langle n | \psi_\alpha^R \rangle \propto \exp(ink_\alpha)$ 。而当我们限定  $J_{L,R}$  为实数时，解出来的开放边界条件的能谱恒为实数，即按照上述定义的点能隙拓扑，开边界无法讨论拓扑性。可以证明<sup>[63-64,80]</sup> 以下几点：

- (1) 点能隙拓扑非厄米体系对边界条件极为敏感<sup>[81]</sup>；

(2) 点能隙拓扑是非厄米体系独有的拓扑<sup>[80]</sup>;

(3) 点能隙拓扑导致了非厄米趋肤效应, 即可视为某种非厄米的体边对应<sup>[63-64]</sup>。

下面我们讨论更复杂一些的情形, 我们考虑一个非厄米的两能带模型<sup>[26,82]</sup> (具有非互易跳跃项的 SSH 模型)。

$$H(k) = d_x \sigma_x + \left( d_y + i \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_y \quad (1-28)$$

众所周知, 上述哈密顿量去掉非厄米项即为著名的 SSH 模型<sup>[83-84]</sup>, 该模型具有拓扑性质。SSH 模型有拓扑平庸和非平庸两个相, 在拓扑非平庸相中, 其具有两个稳定边界态 (拓扑零模), 平庸相则无。这也是对拓扑性质最直观的表征。

回到非厄米模型, 我们知道对于点拓扑的非厄米体系, 其对边界条件极为敏感, 开边界具有非厄米趋肤效应。显然对于上述二能级模型, 其任意一条带都具备点能隙拓扑, 因而必然有非厄米趋肤效应。然而其是否还保留有厄米时的拓扑性质则是个疑问。

解决办法还需从熟悉的厄米拓扑能带理论中寻找。注意到, 对于开边界条件, 厄米 SSH 模型可以通过一个对角的相似变换得到上式

$$\tilde{H}_{\text{OBC}} = S^{-1} H_{\text{OBC}} S \quad (1-29)$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & r & & & & \\ & & r & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & r^{L-2} & \\ & & & & & r^{L-1} \\ & & & & & & r^L \end{pmatrix} \quad (1-30)$$

式中  $r = \sqrt{|(t_1 - \gamma/2) / (t_1 + \gamma/2)|}$ 。

$$e^{ik} \rightarrow \beta \equiv r e^{ik} \quad (1-31)$$

$$H(k) \rightarrow H(\beta) \quad k \rightarrow k - i \ln r$$

这里的  $\beta$  十分重要, 替代了厄米情况下  $e^{ik}$  的作用, 其构成的图形  $C_\beta$  我们称作推广的布里渊区。通过开放边界的薛定谔方程, 我们可以得到

$$|\beta_1(E)| = |\beta_2(E)| = r \equiv \sqrt{\left| \frac{t_1 - \gamma/2}{t_1 + \gamma/2} \right|} \quad (1-32)$$

所以开放边界条件下的波函数相当于两个“平面波”的线性叠加。由于非厄米的特殊性，在上一小节我们也已经讨论过，开边界的能谱跟周期边界的能谱有明显不同。通过数值计算也不难发现，开边界与周期边界的能隙关闭点并不一致。所以，厄米的体边对应原则显然是失效的。拓扑属性始终是与稳定的零能边界态绑定的。仿照厄米情况下布里渊区拓扑不变量的计算，我们可以利用  $\beta$  来替换  $e^{ik}$ ，并且运用双正交基以满足自洽条件，从而得到新的缠绕数。

按照上述原则，我们尝试定义出非厄米 SSH 模型的拓扑不变量。首先该模型仍然具有手征对称性，该对称性确保  $|\tilde{u}_{R,L}\rangle = \sigma_z |u_{R,L}\rangle$ 。  $|u_{R,L}\rangle$  分别是  $H$  的右和左特征向量，其特征值分别为  $-E$  和  $-E^*$ ，

$$\begin{aligned} H(\beta) |u_R\rangle &= E(\beta) |u_R\rangle, \\ H^\dagger(\beta) |u_L\rangle &= E^*(\beta) |u_L\rangle, \end{aligned} \quad (1-33)$$

同样的， $|\tilde{u}_{R,L}\rangle$  也是。事实上，

对于具有手征对称性的哈密顿量，总是可以写成块斜对角矩阵。从而，按照一维厄米哈密顿量定义缠绕数的方法，我们同样可以定义一个  $Q$  矩阵，

$$Q(\beta) = |\tilde{u}_R(\beta)\rangle\langle\tilde{u}_L(\beta)| - |u_R(\beta)\rangle\langle u_L(\beta)| \quad (1-34)$$

$Q$  矩阵也具有手征对称性，其也具有块斜对角形式。

$$Q(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1-35)$$

从而得到所谓的非布洛赫绕数

$$W = \frac{i}{2\pi} \int_{C_\beta} q^{-1} dq \quad (1-36)$$

其中  $C_\beta$  称作“广义布里渊区”，即  $\beta = re^{ik}$  相位变化  $2\pi$  所围成的区域。值得一提的是，使用  $H(k)$  的传统公式有时可能会产生正确的相图，如果  $C_\beta$  恰好是一个单位圆。上式很好的还原了非厄米体系中的体边对应原则，从而定义了非厄米体系能带的拓扑。事实上，对于更一般的模型，按照上述思路，依旧可以得到能还原体边对应的拓扑非布洛赫绕数<sup>[85-86]</sup>。值得注意的是，高维的情况则复杂的多，目前仍旧没有一个完备的统一理论，这也是目前研究的热点。

### 1.0.6 开放系统方法

从以上小节关于非厄米物理的讨论可以看出，非厄米如果作为开放系统的有效描述，它仍然保留了很多孤立系统量子理论的概论，例如波和波函数等。在这

样一种描述中，我们可以完全忽视“环境”的存在。这种描述更接近于一种“静止的”或者“稳定”的状态。然而，在很多情况下，微观量子系统与它们的环境之间的耦合都是至关重要的。尤其对于单个原子、离子、分子、光子或电子的水平上的观察和控制。当然，对于一些固体系统，包括量子点<sup>[87]</sup>、色心<sup>[88-89]</sup>、库珀对盒<sup>[90-91]</sup>，与微波条纹腔<sup>[92-93]</sup>等。在凝聚态物理学中，有一个特别具有代表性的例子，即耦合玻色型浴的自旋耗散模型<sup>[94]</sup>。此外，开放量子系统的研究在宇宙学中也扮演重要作用<sup>[95-96]</sup>。

利用对环境的可控耦合来高精度地控制和操纵量子相干是量子开放系统问题最主要的应用。这种情况下跟非厄米物理显著的区别，我们已经不能保持态的概念，相对的只有密度矩阵的概念。

开放量子系统问题，总结来说就是已知总系统  $(S+B, \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B, \rho)$  以及两个子系统，即  $(S, \mathcal{H}_S, \rho_S)$  及其环境  $(B, \mathcal{H}_B, \rho_B)$ 。总的哈密顿量，

$$\begin{aligned} H &= H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + H_I \\ &= H_S + H_B + H_I \end{aligned} \quad (1-37)$$

需要求 S 的含时演化，即

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\psi_{\alpha}(t)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t)|, \quad \rho_S(t) = \text{Tr}_B \rho(t) \\ \frac{d}{dt} \rho(t) &= -i[H, \rho(t)], \quad \frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i \text{tr}_B [H, \rho(t)] \end{aligned} \quad (1-38)$$

事实上，直接求解该微分方程的复杂度是相当大的，对于 N 个量子比特的系统，解薛定谔方程的复杂度量级是  $2^N$ ，而研究约化密度矩阵的复杂度量级至少是  $4^N$ 。适当的近似显然是必要的。

近些年来发展较为成熟的林德布莱德量子主方程（FGKSLME）方法<sup>[97-98]</sup>就是从上述方程出发，假定了：

- (1) 环境足够大且几乎不含时演化，即波恩近似  $\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B$ ；
- (2) S 和环境 B 的相互作用没有记忆，即马尔科夫假设，这使得  $\rho_S(t)$  在积分符号里可以视为常数；
- (3) 上述两条换言之即为，环境 B 弛豫时间小于 S 弛豫时间，环境 B 与系统 S 的关联时间足够短（关联函数衰减足够快）；
- (4) 采取近谐振近似，保留至系统-环境耦合的二阶微扰项，

我们便可得到一个如下所示的密度矩阵的微分方程<sup>[5]</sup>

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \mathcal{L} \hat{\rho} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_n \left( \hat{L}_n \hat{\rho} \hat{L}_n^{\dagger} - \frac{1}{2} \hat{L}_n^{\dagger} \hat{L}_n \hat{\rho} \right) \quad (1-39)$$

这就是所谓的 Lindblad 主方程，式中  $\hat{L}_n$  表示由环境耦合带来的量子跳跃项。这个

主方程的生成器  $\mathcal{L}$  是时间无关的超算符，这导致了一个表示开放系统动力学的动态半群。类比于哈密顿量的称谓，我们称之为刘维尔量。注意到上式还可以写成

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -i\left(\hat{H}_{\text{eff}}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}_{\text{eff}}^\dagger\right) + \sum_n \hat{L}_n\hat{\rho}\hat{L}_n^\dagger \quad (1-40)$$

其中，

$$\hat{H}_{\text{eff}} := \hat{H} - \frac{i}{2} \sum_n \hat{L}_n^\dagger \hat{L}_n \quad (1-41)$$

为有效非厄米哈密顿量，即忽略(1-40)式右边的量子跳跃项时，系统还是可以退化为一个非厄米哈密顿量描述的薛定谔方程。上述方程还可以通过其他方法推导得到，例如量子轨迹方法<sup>[58]</sup>。该方法假定在  $[t, t + dt]$  时段内，系统的“态”经历了  $(1 - i\hat{H}_{\text{eff}}dt)$  的演化，对态作一个系综平均，即回到(1-39)式。它允许在不直接传播密度矩阵的情况下数值求解主方程。相反，纯态在时间上被传播，耗散过程由哈密顿量的修正和量子跳跃描述——在特定时间发生的状态的突然变化。通过在量子跳跃的时间和类型上进行适当的随机平均，可以在可控制的统计误差内忠实且高效地重构在主方程下传播的系统的期望值。这种技术特别吸引人，因为当与连续测量理论相结合时，它还可以帮助我们对耗散过程的影响有一个物理直观。具体的推导过程在此次略去，有兴趣的读者可以参考综述文章<sup>[58]</sup>。

由于刘维尔量（Liouvillian）是一个超算符，即作用在算符上的算符。按计算的语言来说，算符是作用在矢量上，而超算符是作用在矩阵上的。这对我们计算是很不方便的。有一种常用的方法就是将超算符展平为算符，将矩阵  $\rho = \sum_{n,m=1}^{\dim \mathcal{H}} \langle n|\rho|m\rangle|m\rangle\langle n|$  展平为  $m \times n$  维向量，即张量的向量化<sup>[99]</sup>。即

$$\rho = \sum_{n,m=1}^{\dim \mathcal{H}} \langle n|\rho|m\rangle|m\rangle\langle n| \Rightarrow |\rho\rangle = \rho = \sum_{n,m=1}^{\dim \mathcal{H}} \langle n|\rho|m\rangle|m\rangle\langle n| \quad (1-42)$$

一个简单的示例如下

$$\rho = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |\rho\rangle = \begin{bmatrix} a & c & b & d \end{bmatrix}^T$$

而对超算子  $\mathcal{O}$ ，则有

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\rho &\Rightarrow \mathcal{O}|\rho\rangle \equiv \sum_{n,m} \langle n|\rho|m\rangle(\mathcal{O}|m\rangle)\langle n| \\ \rho\mathcal{O} &\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}|\rho\rangle \equiv \sum_{n,m} \langle n|\rho|m\rangle|m\rangle\langle\tilde{\mathcal{O}}|n\rangle \end{aligned} \quad (1-43)$$

这样一来主方程可以写成

$$\mathcal{L}|\rho\rangle \equiv -i(\mathbb{1} \otimes H - H^T \otimes \mathbb{1})|\rho\rangle - \sum_{\mu} \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} \otimes L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} - L_{\mu}^T L_{\mu}^* \otimes \mathbb{1} \right) |\rho\rangle - (L_{\mu}^* \otimes L_{\mu}) |\rho\rangle \quad (1-44)$$

将问题转化为本征值问题  $\mathcal{L}|\rho\rangle = \lambda_j |\rho\rangle$ ，其中  $\lambda_j$  为 Liouvillian 的本征值谱。这就将原来维度为  $n$  的希尔伯特空间扩充到了  $2n$  维，因此 Liouvillian 的本征态数量为  $2^{2n}$ 。含时密度矩阵的解为

$$\rho(t) = \sum_i \rho_i(0) e^{\lambda_i t} \quad (1-45)$$

其中  $\rho_i(0)$  中对应零本征值的被称为稳态，即系统在无限长时间后所处的状态。

当然由于主方程方法的局限性<sup>①</sup>，对于很多特定情况下的开放系统问题，我们需要采取特定的方法，例如，处理强涨落体系的量子朗之万方法<sup>[100-102]</sup>和处理量子光学及冷原子体系的连续测量理论<sup>[103]</sup>等。值得注意的是许多固体系统都被其耗散动力学的非马尔可夫方面所支配<sup>[6,104-106]</sup>，主方程方法则无法涵盖这些方面。

## 1.1 纠缠熵

自量子力学诞生以来，量子纠缠<sup>[107]</sup>作为一个幽灵般的概念，一直在引发人们的争论。量子纠缠是关乎量子力学本质的一大基本问题。自贝尔提出著名的贝尔不等式之后，量子纠缠在一系列领域都引发了人们的广泛研究，尤其是在量子光学、量子信息和量子密码学等领域。值得注意的是，得益于量子信息理论的发展，凝聚态物理中量子纠缠<sup>[108-109]</sup>也越来越多的被研究和发展，凝聚态体系中多体纠缠态的研究迅速成为一个非常活跃的话题。与此同时，量子多体系统的数值方法也利用了这些进展，非常有效的变分技术如矩阵乘积和张量网络方法的发展令人印象深刻<sup>[110-111]</sup>。

另一方面，熵作为一个经典物理学中的概念，它描述了一个系统的混乱程度。从信息学的角度上看，熵就是系统所有可能微观状态所蕴含的信息量，换言之，也就是我们要从一个宏观系统中确定其微观状态所需要的信息量或者说是信息缺乏量。这本质上也就是统计学中随机性或者不确定性，它源于微观粒子的无规则热运动。而将这个概念扩充到量子领域，则会出现不同。我们将看到，即使在零温的时候，熵也可以是非零的。这种熵的产生并不是由于客观的信息缺乏，而是源于上述量子力学的一个基本性质——量子纠缠。这种量子随机性所产生的熵我们叫做纠缠熵或者几何熵<sup>[112]</sup>。近年来，人们发现，纠缠熵在高能物理<sup>[113]</sup>和凝聚态物

① 主方程方法通常应用于量子相干高度可控的少体系统，如超导量子比特系统和冷原子体系。

理中均扮演了举足轻重的角色，对纠缠熵的研究加深了人们对黑洞、量子引力以及固体宇宙的理解。

### 1.1.1 纠缠熵的定义

在定义纠缠熵之前，我们需要考虑一个孤立的零温系统。将系统的自由度分成两块，两个希尔伯特子空间  $A$  和  $B$ ，即  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 。若  $A$  和  $B$  之间没有纠缠，则系统是一个直积态，即  $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ 。若  $A$  和  $B$  之间存在纠缠，则系统不能写成一个直积态。在讨论量子纠缠时，我们必须引入密度矩阵的概念，即  $\rho_{AB} := \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 。因为存在纠缠的子系统将不能写成一个量子态的形式，而只有密度矩阵的形式。

我们定义  $A$  的约化密度矩阵为

$$\rho_A = \text{Tr}_B [\rho_{AB}]$$

对  $B$  同理。不难发现约化密度矩阵有以下性质：

- (1)  $\text{Tr}_A [\rho_A] = \text{Tr}_{AB} [\rho_{AB}] = 1$ ;
- (2)  $\rho_A$  是厄米的;
- (3) 若两个子系统未纠缠，则  $\rho_A$  的本征值只有 1（不简并）和 0（可以存在简并）;
- (4) 作用于子系统  $A$  上的可观测量  $O_A$  的期望值可以使用如下公式计算：

$$\langle\psi|O_A|\psi\rangle = \text{Tr}_{A,B} [|\psi\rangle\langle\psi|O_A] = \text{Tr}_A [\rho_A O_A] \quad (1-46)$$

从而冯诺伊曼熵（纠缠熵）可以通过如下公式定义：

$$S_A = -\text{Tr}_B [\rho_A \ln \rho_A] = -\sum_i p_i \ln p_i \quad (1-47)$$

其中  $p_i$  为  $\rho_A$  的本征值。不难证明纠缠熵有如下性质：

- (1) 若系统是一个直积态，则  $A$  子系统是一个纯态， $S_A = 0$ ;
- (2) 若系统是一个纯态，则  $S_A = S_B$ 。

推广到更一般的情形，则有：

- (1)  $S(\rho)$  为零当且仅当  $\rho$  表示纯态;
- (2) 对于最大混态， $S(\rho)$  取极大值，等于  $\log N$ ， $N$  是希尔伯特空间的维数;
- (3) 对  $\rho$  做基变换， $S(\rho)$  不变。即  $S(\rho) = S(U\rho U^\dagger)$ ， $U$  为任意么正变换;
- (4)  $S(\rho)$  对于无关联系统可加性： $S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$ ;
- (5) 若总系统存在  $A$  和  $B$  以外的子系统  $C$ ，则  $S(\rho)$  具有次可加性： $S(\rho_{AC}) \leq$

$S(\rho_A) + S(\rho_C)$ ，更强的结论为： $S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC})$ 。

值得一提的是，纠缠熵中的约化密度矩阵若换成  $\rho \sim e^{-\beta H}$ ，我们将得到波尔茨曼-吉布斯熵（热力学熵）。在纠缠熵的基础上，我们可以引申出一个更一般的物理量：瑞尼熵

$$S_A(n) = \frac{1}{1-n} \ln(\text{Tr}[\rho_A^n]) \quad (1-48)$$

其中  $n$  为任意大于 1 的正整数。从而，纠缠熵可以看作瑞尼熵的一个特例，

$$-\text{Tr}[\rho_A \ln(\rho_A)] = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \ln(\text{Tr}[\rho_A^n]) \quad (1-49)$$

需要注意的是，在量子蒙特卡洛或者计算量子场论中的几何熵时，瑞尼熵是更自然的量。

当我们考虑凝聚态体系中的一些物理量时，另一个量。互信息，

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (1-50)$$

也扮演十分重要的作用。其具备以下性质：

- (1) 非负性： $I(A : B) \geq 0$ ；
- (2) 若互信息为 0 则  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ ，即 AB 之间无任何关联；
- (3) 若 AB 为纯态，则  $I(A : B) = 2S(\rho_A)$ ；
- (4)  $I(A : B)$  刻画了 AB 之间的关联度，其满足  $I(A : B) \geq \frac{(\langle O_A O_B \rangle - \langle O_A \rangle \langle O_B \rangle)^2}{2\|O_A\|^2\|O_B\|^2}$ 。

### 1.1.2 纠缠谱

在这一节我们进一步讨论量子信息理论中一系列线性代数操作，例如，施密特分解。

我们分别在  $\mathcal{H}_A$  和  $\mathcal{H}_B$  中选定一组基  $|a_i\rangle$ 、 $|b_i\rangle$ ，纯态  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  可以写成

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} M_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \quad (1-51)$$

其中  $M$  是  $[m = \dim(\mathcal{H}_A)] \times [n = \dim(\mathcal{H}_B)]$  维的矩阵。紧接着我们对  $M$  进行奇异值分解。可以证明的是，存在幺正矩阵  $U$  (大小  $m \times m$ ) 和  $V$  (大小  $n \times n$ )，以及一个对角矩阵  $\Lambda$ ，其对角元  $\lambda_i$  即为  $M$  的奇异值且为实的非负数，并使得  $M = U\Lambda V^\dagger$ 。如此，我们可以重写纯态

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} U_{ik} \lambda_k V_{kj}^\dagger |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \quad (1-52)$$

并重新定义两组基  $|u_k\rangle = \sum_i U_{ik} |a_i\rangle$ ， $|v_k\rangle = \sum_j V_{jk} |b_j\rangle$ 。它们显然满足正交归一

条件  $\langle u_k | u_{k'} \rangle = \langle v_k | v_{k'} \rangle = \delta_{k,k'}$ 。至此，我们就完成了对  $|\psi\rangle$  的施密特分解

$$|\psi\rangle = \sum_k \lambda_k |u_k\rangle \otimes |v_k\rangle \quad (1-53)$$

并且，我们容易得到约化密度矩阵的新形式

$$\rho_A = \text{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|] = \sum_k |\lambda_k|^2 |u_k\rangle\langle u_k| \quad (1-54)$$

对  $B$  同理。不难看出，这时  $\rho_A$  已经被自动对角化了，其本征值即为  $|\lambda_k|^2$ ，这称作约化密度矩阵的纠缠谱。 $|\lambda_k|^2$  其实也是  $\rho_B$  的非零本征值。这同时也实现了对  $S_A = S_B$  的证明。

之所以称之为纠缠谱，是因为其确实在某些方面类似于能谱的作用。为了看出纠缠谱的物理意义，我们需要引入热场双重态的概念，

$$|\Psi\rangle_{\text{TFD}} = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B \quad (1-55)$$

其中  $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$  为配分函数，事实上就是态的归一化因子。约化密度矩阵

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle_{AA} \langle n| \\ &= \frac{1}{Z} e^{-\beta H_A} \end{aligned} \quad (1-56)$$

式中  $H_A |n\rangle_A = E_n |n\rangle_A$  为纠缠哈密顿量， $p_i = e^{-\beta E_i}/Z$  为波尔茨曼权重。从而，纠缠熵

$$\begin{aligned} S_A &= -\text{tr}_A [\rho_A (-\beta H_A - \ln Z)], \\ &= \beta (\langle H_A \rangle - F), \end{aligned} \quad (1-57)$$

其中  $\beta F = -\log Z$  为自由能。从上述推导中，我们可以看出纠缠谱在熵的计算过程中扮演着类似能谱的作用。此外，从纠缠谱中的中间能隙态还能与拓扑边界态一一对应。

从这个过程逆推，假设我们先有一个子系统  $A$  混态  $\rho_A$ ，需要得到一个纯态的总系统。我们知道  $A$  的补集  $B$  的非零本征值与  $A$  相同，因此，最简单的方法就是复制一份  $A$  来替充  $B$ 。因此，我们先对角化  $\rho_A$ ，不妨令  $\rho_A = \sum_k p_k |k\rangle\langle k|$ ，则纯态  $|\psi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k} |k\rangle_A \otimes |k\rangle_B$ ，其中  $B$  为  $A$  的复制。该过程叫做  $\rho_A$  的纯化<sup>[114]</sup>。

### 1.1.3 面积律

面积律的概念是相对于体积律提出的<sup>[115-117]</sup>。在热力学和统计物理中，熵总是正比于系统的体积，这可称之为体积律。而在零温的量子系统中，熵不再正比

于体积，而是在一般情况下正比于表面积。更为严谨的描述如下：对于仅具有短程相互作用的零温量子体系的基态，其子系统纠缠熵是尺度的正关联函数，且最高幂次为子系边界面积的幂次，即

$$S_A \sim \mathcal{O}(\text{Area of } \partial A) = \mathcal{O}(L^{d-1})$$

更详细地说，设

(1) 纯态  $|\psi\rangle$  是空间维度  $d$  上某局域哈密顿量的基态，其中所有关联函数在空间中呈指数衰减，

(2) 关联长度有限  $\xi$ ，且子系统  $A$  的尺度  $L$  比  $\xi$  要大。

(3)  $A$  和  $B$  ( $B$  是  $A$  的补集) 之间的纠缠完全是由于局部相关性导致的，即不存在某些长程关联。

(4) 位于  $A$  内部的自由度之间的相关性不影响  $S_A$ ，区域  $B$  也一样。

这样我们就可以说，对于纠缠熵的唯一贡献是那些发生在  $A$  和  $B$  边界上的相关性。该定理对任意维的有能隙系统都适用，对某些特定的无能隙系统也适用。并且对于 1D 中的有能隙的系统可以通过 Lieb-Robinson 界限定理<sup>[118]</sup>严格证明。特别地，通过近年来飞速发展地张量网络方法<sup>[111]</sup>，我们能够更直观地看到纠缠熵的相关性质。在一维情况下，有能隙意味着基态可以通过一个矩阵乘积态表示。在这种状态中，每个格点只通过与相邻格点的纠缠与系统中的其他部分相联系。在高维，情况会更加复杂。MPS 在  $d > 1$  中的直接推广称为“投影纠缠对态 (PEPS)”<sup>[111,119-120]</sup>。这种状态明显也满足面积律：这种状态的一个子区域的纠缠熵上界由被割断的键数乘以  $\log(\chi)$  给出。

特别的，需要注意以下违反面积律的情况：

(1) 对 1 维的量子临界系统， $S_A \sim \mathcal{O}(\ln L)$ 。<sup>①</sup>

(2) 对于高维的具有费米面的无能隙系统， $S_A \sim \mathcal{O}(L^{d-1} \ln L)$ ：可以认为高维费米面的每个点都对应一个 CFT<sup>[124-125]</sup>。

(3) 对于高维连续对称性破缺相<sup>[126]</sup>， $S_A \sim \mathcal{O}(L^{d-1}) + \mathcal{O}(\ln L)$

(4) 对于 2 维拓扑序， $S_A \sim \mathcal{O}(L) + \ln D$ ，其中  $D$  为量子维度<sup>[127-128]</sup>。

(5) 对于高维离散对称性破缺相<sup>[129-130]</sup>， $S_A \sim \mathcal{O}(L^{d-1}) + \ln D$ ，其中  $D$  为简并度。

(6) 高度无序的系统，如随机单态系统<sup>[131-133]</sup>。

① 通过二维共形场论 (CFT) 可以证明， $S_A = \frac{c}{3} \log \frac{L}{\epsilon}$  (其中  $A$  是长度为  $L$  的单个区间)， $\epsilon$  是一个短程 (紫外) 截断， $c$  是“中心荷”，是关于关键自由度数目的一个量度。即使有能隙，严格的结果仅表明存在具有  $\mathcal{O}(e^{L \log d})$  (其中  $L$  是系统的线性大小) 的 PEPS<sup>[121]</sup>。因此，在 1 维的无能隙态和 1 维的有能隙态中，仅采用这个数据 (面积定律) 的数值方法存在困难。更精细的表述考虑了在每个长度尺度上的纠缠程度。将这些额外数据整理为逐层的纠缠重整化过程。这个想法的最佳实现是 MERA (多尺度纠缠重整化近似)<sup>[122-123]</sup>，它是研究  $d = 1$  量子临界点的最先进方法。

当然如果系统不处于基态。在热力学极限下，一个多体系统的第一激发态通常具有零能量密度<sup>①</sup>。如果基态遵循面积定律，那么这样的（激发）状态仍将遵循面积定律。但是一般来说，具有有限能量密度和有限温度的状态将具有体积律的纠缠熵。

体积律的系数是热熵密度，它随温度增长而增长。热态是高度纠缠（混乱）的状态，一般考虑如下的热场双重态，同时也是热态的纯化：

$$|\psi\rangle = \mathcal{Z}^{-\frac{1}{2}} \sum_E e^{-\beta E/2} |E\rangle |E\rangle$$

由此计算的纠缠熵可以与热力学熵对应起来。这样一来，实际上，热态的体积律纠缠熵可以视为与热浴（而不是系统本身的部分之间的纠缠）的（短程）纠缠<sup>[134-137]</sup>。对于这种混态，需要使用更复杂的测量方法来从这种混合熵中分离出量子纠缠，例如纠缠消极度<sup>[138-139]</sup>等。

#### 1.1.4 自由费米子方法

在讨论凝聚态物理问题时，最简单的且最富有启发性的是从以下二次型哈密顿量出发

$$H_0 = \sum_{i,j} A_{i,j} c_i^\dagger c_j + \sum_{i,j} B_{i,j} c_i^\dagger c_j^\dagger + \text{h.c.} \quad (1-58)$$

显然  $H_0$  可以通过玻戈留波夫变换对角化，从而二体关联函数  $\langle c_i^\dagger c_j \rangle$  能够很容易的计算出来。维克（Wick）定理指出<sup>[140-142]</sup>，通过二体关联函数  $\langle c_i^\dagger c_j \rangle$ ，可以生成任意的关联函数。假设我们取一个子系统 A，其中的关联函数  $C_{ij} = \langle c_i^\dagger c_j \rangle_{i,j \in A}$  也是能够轻松得到的，从而约化密度矩阵  $\rho_A$  可以通过  $C_{ij}$  写出来。这也意味着纠缠哈密顿量  $H_A$  也是如上的二次型。 $\rho_A$  和  $H_A$  的形式仍是不明朗的，我们从  $C_{ij} = \langle c_i^\dagger c_j \rangle_{i,j \in A}$  出发，构造关联矩阵

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} \langle c_i^\dagger c_j \rangle & \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \\ \langle c_i c_j \rangle & \langle c_i c_j^\dagger \rangle \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} c^\dagger \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c^\dagger \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \begin{bmatrix} A & D \\ D^\dagger & 1 \pm A^t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-59)$$

其中  $D_{ij} = \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle, A_{ij} = \langle c_i^\dagger c_j \rangle$ 。

① 后面我们将看到，对于一般的么正的理论，这一点始终成立。而对于非么正理论，这一点是显然违背的

先通过玻戈留波夫变换使其对角化，即

$$\begin{bmatrix} a^\dagger \\ a \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} c^\dagger \\ c \end{bmatrix},$$

$$U \begin{bmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U^\dagger = \begin{bmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中  $a_k^\dagger, a_k$  表示 Bogoliubov 准粒子。得到的矩阵为对角矩阵，

$$\begin{bmatrix} \langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle & \langle a_k^\dagger a_{k'}^\dagger \rangle \\ \langle a_k a_{k'} \rangle & \langle a_k a_{k'}^\dagger \rangle \end{bmatrix} = \Lambda = U C U^\dagger \quad (1-60)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_k \delta_{k,k'} & 0 \\ 0 & (1 \pm \lambda_k) \delta_{k,k'} \end{bmatrix}$$

式中  $\lambda_k, (1 \pm \lambda_k)$  为关联矩阵的本征值。其中正负号分别表示玻色子（上层符号）和费米子（下层符号）。鉴于玻色子和费米子的区别，我们引入矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然有  $U \Sigma U^\dagger = \Sigma$ ，且不难发现  $U C \Sigma U^{-1} = \Lambda \Sigma$ 。

在上一小节，我们知道约化密度矩阵可以由一个纠缠哈密顿量表示， $\rho_A = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_A}$ 。其中  $\beta$  可以设为 1。由维克定理，又可以得知纠缠哈密顿量的形式， $H_A = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$ ，其中  $a_k$  为纠缠模式。至此，只需要得到  $\epsilon_k$  的值，就能够获得所有的纠缠信息。这里需再利用经典-量子对应原理，将这里的算符的期望值视作某种热力学系综平均。其中期望值为

$$\langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle = \delta_{k,k'} \lambda_k, \quad \langle a_k a_{k'} \rangle = \langle a_k^\dagger a_{k'}^\dagger \rangle = 0 \quad (1-61)$$

统计平均为

$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = \frac{1}{e^{\epsilon_k} \mp 1} \quad (1-62)$$

取两式相等即得

$$\lambda_k = \frac{1}{e^{\epsilon_k} \mp 1} \quad (1-63)$$

从而

$$\epsilon_k = \ln \left( \frac{1 \pm \lambda_k}{\lambda_k} \right) \quad (1-64)$$

约化密度矩阵  $\rho_A \sim \exp\left(-\sum_k \ln\left(\frac{1\pm\lambda_k}{\lambda_k}\right) a_k^\dagger a_k\right)$ , 最终的纠缠熵为

$$S_A = \sum_k -\lambda_k \ln(\lambda_k) - (1 \pm \lambda_k) \ln(1 \pm \lambda_k) \quad (1-65)$$

对于一维费米子体系, 上式可以通过一些方法解析, 例如通过 Toeplitz 矩阵<sup>[143]</sup>的渐进解析性质得到的 Fisher-Hartwig 猜想<sup>[144-145]</sup>, 得到纠缠熵的近似表达式。由于过程过于冗长, 在此便不再赘述。一个很重要的结论为, 对于有能隙系统, 其纠缠熵与系统尺寸无关; 而对于一维费米海,  $S_A = \frac{1}{3} \log L$ 。

## 1.2 一维相互作用费米子体系的解析方法

### 1.2.1 玻色化

在凝聚态物理中, 相互作用问题一直是最为困难的。显然, 直接处理四次型哈密顿量在解析上变得相当困难。在二维和三维中, 许多低温下相互作用的费米子系统是由朗道发展的费米液体理论描述的。根据这一理论, 在零度温度下, 每一种费米子的基态在动量空间中都有一个费米面, 其能量称为费米能量  $E_F$ , 使得该表面内的所有状态 (即能量小于  $E_F$  的状态) 都被占据, 而该表面外的所有状态都未被占据。一个基本的低能激发是一个粒子在费米表面外 (内) 的状态下被创造 (湮灭); 它们分别被称为粒子激发和空穴激发。在相互作用系统中, 这些单粒子激发伴随着粒子-空穴对云, 它们通常被称为准粒子。它们携带的电荷与单个粒子 (或空穴) 相同。在费米液体中, 各种关联函数在长距离上以幂次律衰减, 其指数与相互作用的强度无关。因此, 非相互作用系统和相互作用系统具有相同的指数, 具有普适性。而当自发对称性破缺发生, 即某些序产生时, 上述讨论便不再适用。

一维中相互作用的费米子系统的行为完全不同。一般情况下, 它是一个拉丁格液体, 其具有以下性质。

- (1) 所有的低能激发都可以被认为是粒子-空穴 (对) 激发;
- (2) 所有这些激发都具有线性色散关系;
- (3) 费米动量处的动量分布函数存在不连续, 即有一个尖锐的费米面;
- (4) 指数以一种非普适性的方式依赖于相互作用的强度。

玻色化的基本思想是, 当某种理论既可以当作费米子问题思考, 也可以当作玻色子问题思考, 且得到的结果一致时, 我们便可以采取那种更简单的方法, 而这种方法通常是玻色子的方法。后文中, 我们将看到, 玻色化的方法可以将一个相互作用的费米子问题转化为自由的玻色子问题。这样的转化思路无疑使问题得到极大地化简。

1963 年, 拉丁格第一个在相互作用费米子的一维理论中确定某些基本激发的玻色子样行为<sup>[146]</sup>。随后, 又有很多物理学家沿着这一思路, 发展了这套理论。1975 年, 西德尼·科尔曼 (Sidney Coleman<sup>[147]</sup>) 以及丹尼尔·马蒂斯 (Daniel C. Mattis<sup>[148]</sup>) 依据 (1 + 1) 维狄拉克费米子的解析性质分别提出了玻色子化方法。他们确定了这种费米子的关联函数可以用自由玻色子场的关联函数来表示。至此, 一维相互作用费米子体系的玻色化方法被基本建立, 这对高能物理和凝聚态物理都具有深刻的影响。后来人们逐渐认识到, 一维金属体系中的低能区可以用一种普遍有效理论来描述, 这种理论后来被命名为“拉丁格-”或“Tomonaga-Luttinger 液体”。这种状态的微观描述是由 Haldane 得到的<sup>[149]</sup>, 而最初的想法是由 Efetov 和 Larkin 提出的<sup>[150]</sup>。

玻色化方法内涵十分丰富, 限于篇幅, 这里只提供它的基本思路。关于玻色化的详细介绍, 读者可以参考教材和综述文章<sup>[151-152]</sup>。

这里我们先考虑无自旋相互作用费米子。假设费米海无穷大, 所有的激发具有线性色散, 那么可以定义密度算符

$$\rho(q) \equiv \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k \quad (1-66)$$

$c_k^\dagger, c_k$  是在费米面附近产生一个电子或者空穴。注意到有  $\rho(-q) = \rho^\dagger(q)$ 。则坐标空间的费米场算符可以定义为

$$\begin{aligned} \psi(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} c_k, \\ \psi^\dagger(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} c_k^\dagger. \end{aligned} \quad (1-67)$$

式中  $L$  为系统的尺寸。注意到

$$\begin{aligned} :\psi^\dagger(x)\psi(x): &:= \frac{1}{L} \sum_{kp} e^{i(k-p)x} : c_p^\dagger c_k : \\ &= \frac{\hat{N}}{L} + \frac{1}{L} \sum_{q \neq 0} e^{-iqx} \rho(q). \end{aligned} \quad (1-68)$$

式中  $\hat{N} = \sum_k : c_k^\dagger c_k : = \sum_k \left[ c_k^\dagger c_k - \langle c_k^\dagger c_k \rangle_0 \right]$ , 其中  $:$  表示减除费米海以下的贡献。通过计算不难得到

$$[\rho(p), \rho(q)] = -\frac{Lp}{2\pi} \delta_{p,-q} \quad (1-69)$$

从而可以将  $\rho(p)$  视为玻色子算符，即定义

$$\begin{aligned} b_q &= \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \rho(-q) \quad (q > 0), \\ b_q^\dagger &= \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \rho(q) \quad (q > 0), \end{aligned} \quad (1-70)$$

显然满足玻色子对易关系

$$\begin{aligned} [b_q, b_{q'}] &= [b_q^\dagger, b_{q'}^\dagger] = 0, \\ [b_q, b_{q'}^\dagger] &= \delta_{q,q'}. \end{aligned} \quad (1-71)$$

且不难得到与费米场的对易关系

$$\begin{aligned} [b_q, \psi(x)] &= \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{kp} e^{ipx} [c_{k-q}^\dagger c_k, c_p] = -\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} e^{-iqx} \psi(x), \\ [b_q^\dagger, \psi(x)] &= \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{kp} e^{ipx} [c_{k+q}^\dagger c_k, c_p] = -\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} e^{iqx} \psi(x). \end{aligned} \quad (1-72)$$

在实际处理相互作用费米子问题时，我们先要将哈密顿量连续化

$$H = H_0 + H_I \quad (1-73)$$

自由部分  $H_0$  能够轻易地化成自由玻色场。难点主要在于

$$H_I \sim \psi^\dagger(x') \psi^\dagger(x) \psi(x') \psi(x)$$

部分的处理。这里我们还需要将费米场拆成左行和右行的部分

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{ik_F x} \psi_{R-phys}(x) + e^{-ik_F x} \psi_{L-phys}(x) \\ &\approx e^{ik_F x} \psi_R(x) + e^{-ik_F x} \psi_L(x) \end{aligned} \quad (1-74)$$

这样一来，相互作用项可以视作左行、右行费米子之间的散射。需要注意的是，这里我们将保留如下形式的项：

$$\psi_R^\dagger \psi_R \psi_R^\dagger \psi_R, \quad \psi_L^\dagger \psi_L \psi_L^\dagger \psi_L, \quad \psi_R^\dagger \psi_R \psi_L^\dagger \psi_L$$

而

$$e^{-2ik_F x} \psi_R^\dagger \psi_L \psi_R^\dagger \psi_R, \quad e^{-4ik_F x} \psi_R^\dagger \psi_L \psi_L^\dagger \psi_L$$

以及它们的共轭，这些项包含振荡因子的项，被称为 **Umklapp** 项（即散射将左行费米子变成右行费米子，反之亦然），且通常会平均为零。我们这里先忽略这些项。

通过一系列冗长的计算，原哈密顿量可以写成以下形式

$$H = R^\dagger R + L^\dagger L + \lambda (R^\dagger L^\dagger + LR) \quad (1-75)$$

其中  $L, R$  为左行和右行密度（玻色子）算符， $\lambda$  是跟相互作用强度有关的系数。对上述哈密顿量做玻戈留波夫变换

$$\begin{aligned} S &= \alpha R + \beta L^\dagger, \\ T^\dagger &= \beta R + \alpha L^\dagger, \end{aligned} \quad (1-76)$$

新的玻色子算符显然满足需要满足对易条件  $[S, S^\dagger] = \alpha^2 - \beta^2 = 1$ 。不妨令  $\alpha = \cosh \gamma, \beta = \sinh \gamma$ ，则不难得到  $\gamma = \frac{1}{4} \ln[(1+\lambda)/(1-\lambda)]$ ，从而原哈密顿量被对角化

$$H = \frac{1}{\cosh 2\gamma} (S^\dagger S + T^\dagger T) \quad (1-77)$$

上式也可以通过某种么正变换得到，即

$$U = \exp[\gamma (R^\dagger L^\dagger - LR)], \quad U^{-1} = U^\dagger$$

则

$$URU^{-1} = \alpha R - \beta L^\dagger, \quad UL^\dagger U^{-1} = -\beta R + \alpha L^\dagger$$

最终回到上式。

通常我们研究相互作用模型时，我们要从一个低能有效场论模型出发。我们再回到玻色子产生湮灭算符  $b_q, b_q^\dagger$ 。为了构建完备的玻色化理论，我们还需要做的一件事就是完善玻色子表示的希尔伯特空间，由于篇幅所限，这里略去不表。

有了完备的理论，玻色场可以由玻色子算符表示如下

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q>0} \alpha_q^*(x) e^{-\alpha q/2} b_q = \frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{e^{iqx}}{\sqrt{q}} e^{-\alpha q/2} b_q \\ \varphi^\dagger(x) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q>0} \alpha_q(x) e^{-\alpha q/2} b_q^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{q}} e^{-\alpha q/2} b_q^\dagger \\ \phi(x) &= \varphi(x) + \varphi^\dagger(x) = \frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-\alpha q/2} [e^{iqx} b_q - e^{-iqx} b_q^\dagger]. \end{aligned} \quad (1-78)$$

上述场算符均包含了左行和右行的部分，为了最后得到的场论哈密顿量的形式最为简洁，我们还需做以下变换

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_L - \phi_R) & \phi_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta - \phi) \\ \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_L + \phi_R) & \phi_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta + \phi) \end{aligned} \quad (1-79)$$

不难得到对易关系

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\theta(x), \theta(y)] = 0, \\ [\phi(x), \theta(y)] &= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(x-y) + \frac{i}{L}(x-y), \\ [\phi(x), \partial_y \theta(y)] &= i\delta(x-y) - \frac{i}{L}. \end{aligned} \quad (1-80)$$

这样一来，费米子算符可以表示为，

$$\psi_{R,L}(x) = \frac{F_{R,L}}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{\pm i \frac{2\pi\hat{N}_{R,L}}{L}x} \exp[-i\sqrt{\pi}[\theta(x) \mp \phi(x)]] \quad (1-81)$$

以及费米子二次型算符

$$\begin{aligned} :\psi_{R,L}^\dagger(x)\psi_{R,L}(x): &= \frac{\hat{N}_{R,L}}{L} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\partial_x\phi \mp \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\partial_x\theta, \\ :\psi_R^\dagger\psi_R: + :\psi_L^\dagger\psi_L: &= \frac{\hat{N}_R + \hat{N}_L}{L} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi, \\ :\psi_R^\dagger\psi_R: - :\psi_L^\dagger\psi_L: &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\theta, \end{aligned} \quad (1-82)$$

这样，哈密顿量中自由费米子部分可以写成

$$H_0 = \frac{v_F}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[ :(\partial_x\theta)^2: + :(\partial_x\phi)^2: \right] + \frac{\pi}{L} v_F \sum_{\nu=R,L} \hat{N}_\nu (\hat{N}_\nu + 1) \quad (1-83)$$

定义  $\Pi(x) = \partial_x\theta(x)$ ，则哈密顿量可以写成如下的正则形式

$$H_0[\Pi(x), \phi(x)] = \frac{v_F}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[ :(\Pi)^2: + :(\partial_x\phi)^2: \right] + \frac{\pi}{L} v_F \sum_{\nu=R,L} \hat{N}_\nu (\hat{N}_\nu + 1). \quad (1-84)$$

注意到我们对角化相互作用部分用到的么正变换，写成玻色场的形式则有

$\phi_{1,2}(x) = \cosh\gamma\phi_{R,L} - \sinh\gamma\phi_{L,R}$ ，用场  $\phi$  和  $\theta$  表示则有，

$$\begin{aligned} \phi_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{g}\theta(x) \mp \frac{\phi(x)}{\sqrt{g}} \right], \\ \theta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} [\phi_1(x) + \phi_2(x)], \\ \phi(x) &= \sqrt{\frac{g}{2}} [\phi_2(x) - \phi_1(x)]. \end{aligned} \quad (1-85)$$

根据这些新的场算符，哈密顿量写成

$$\begin{aligned}
 H_b &= \frac{u}{2} \sum_{\nu=1,2-L/2}^{L/2} \int dx : (\partial_x \phi_\nu)^2 : \\
 &= \frac{u}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[ g : (\partial_x \theta)^2 : + \frac{1}{g} : (\partial_x \phi)^2 : \right]
 \end{aligned} \tag{1-86}$$

我们将  $\phi$  和  $\theta$  称为对偶场，因为  $[\phi(x); \phi(y) = \partial_y \theta(y)]$  和  $[\theta(x); \theta(y) = \partial_y \phi(y)]$  都是共轭的，即给出了等价的  $\phi$ -或  $\theta$ -表示，就像量子力学中的  $x$ -和  $p$ -表示一样。如果我们将给定表示中场的二阶导数的系数定义为“耦合常数”（例如，在  $\phi$ -表示中为  $1/g$ ），那么一个表示中的弱耦合理论在另一个表示中是“对偶”的（等价的）强耦合理论，反之亦然。其中  $g < 1$  对应于斥力相互作用， $g > 1$  对应于吸引相互作用， $g = 1$  是无相互作用的点，即自由玻色子场。非相互作用理论是自对偶的。

在哈密顿量(1-86)中，我们忽略了 Umklapp 项：

$$\begin{aligned}
 H_{\text{Umklapp}} &= \frac{\Delta}{4\pi^2 \alpha^2} \int dx \left[ e^{-i4\sqrt{\pi}\phi(x)} + \text{H.c.} \right] \\
 &\sim \frac{\Delta}{2\pi^2 \alpha^2} \int dx \cos[4\sqrt{\pi}\phi(x)].
 \end{aligned} \tag{1-87}$$

类似的项出现在 Hubbard 模型及 XXZ 模型中。让我们看一下这种余弦项的影响。对于共轭变量  $\phi$  和  $\partial_x \theta$ ，

$$[\phi(x), \partial_y \theta(y)] = i\delta(x - y). \tag{1-88}$$

我们可以进行如下的正则变换

$$\begin{aligned}
 \phi &\rightarrow \sqrt{g}\phi, \\
 \theta &\rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{g}},
 \end{aligned} \tag{1-89}$$

这将式(1-86)变成自由玻色子。在这种情况下，Umklapp 项变成

$$H_{\text{Umklapp}} \rightarrow \frac{\Delta}{2\pi^2 \alpha^2} \int dx \cos[4\sqrt{\pi g}\phi(x)]. \tag{1-90}$$

加上式(1-83)，这个模型就是所谓的正弦-戈登模型<sup>[152]</sup>，它是场论中一个非常著名的模型。也广泛应用于凝聚态物理中一维相互作用体系，例如 Hubbard 模型及 XXZ 模型等。

值得注意的是，对于有自旋的理论，例如 Hubbard 模型， $\phi$  场有两个分量，分别表示电荷自由度（密度涨落） $\phi_c$  和自旋自由度  $\phi_s$ 。这两个部分在理论上相互独立，这就是所谓的电荷-自旋分离<sup>[152]</sup>。结合一些其他方法，如重整化平均场等<sup>[153]</sup>，

可以对高温超导等强关联体系中的一些现象作出很好的诠释。

### 1.2.2 二维共形场论

共形场论，即在共形变换（保角变换）下不变的场理论<sup>[154]</sup>。一般认为，相变的临界点可以由共形场论很好的描述。特别是在经典的二维统计模型和一维的量子模型的相变理论中，它们的临界行为都能在二维共形场中找到很好的对应。1984 年 Belavin, Polyakov 和 Zamolodchikov 发表了他们关于共形场理论 (CFT) 的基本论文<sup>[155]</sup>。CFT 为 (1 + 1) 维无间隙线性谱的所有模型提供了统一的方法。Cardy 则发现了一维体系中临界点附近的行为与共形场论的关系<sup>[156-157]</sup>。临界系统的关联函数服从无穷多个具有微分方程形式的 Ward 恒等式<sup>①</sup>，这是 CFT 最重要的结果之一。求解这些方程可以唯一地确定所有的多点关联函数。

在这一小节中，我们尝试简单说明共形场论在凝聚态物理中的应用。

首先，需要明确的是，我们在讨论一个 CFT 时，需要预先知道以下数据，即一个 CFT 的身份信息：

- (1) 一系列原生场  $\phi_j$ ;
- (2) 这些场的共形维数  $(\Delta_j, \bar{\Delta}_j)$ ;
- (3) 场的融合规则，或者是算子乘积展开规则;
- (4) 它的中心荷  $c$ 。<sup>②</sup>

所谓原生场，即在一个共形变换  $z \rightarrow w$  下，满足如下变换条件的场

$$\phi_j(z, \bar{z}) \rightarrow \phi_j(w, \bar{w}) = \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-\Delta_j} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{\Delta}_j} \phi_j(z, \bar{z}) \quad (1-91)$$

式中  $(\Delta_j, \bar{\Delta}_j)$  分别是原生场的全纯和反全纯共形维数。

另一方面，关联函数的计算是场论的中心目标之一。通常情况下，当你把两个算子的坐标靠近  $z \rightarrow w$  时，关联函数会发散。所谓算子乘积展开 (OPE)，就是将两个算子放在一起的一种表示：

$$\lim_{z \rightarrow w} \phi_i(z) \phi_j(w) \sim \sum_k c_{ij}^k \frac{\phi_k(w)}{(z - w)^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} \quad (1-92)$$

① 这导致了共形不变系统是具有无限个守恒定律的系统，从而具有可积性以及一系列有用的结果。

② 关于二维的 CFT 的中心荷  $c$ ，有一个重要的定理叫做  $c$  定理，由 Zamolodchikov 在上世纪八十年代末提出。 $c$  定理断言，在一个二维理论中，如果其具有旋转不变性，么正性和能量-动量守恒，那么存在一个函数  $C$ ，它沿着重整化群流是非增的。此外，在一个红外（大系统尺寸）不动点，它等于（红外）共形场论的中心荷  $c$ 。即，某个耦合系数的不动点  $g = g^*$  处，对应的 CFT 中心荷  $C(g^*) = c$ ，并且有  $c_{UV} \geq c_{IR}$ 。另一方面，可以认为中心荷  $c$  对应于理论的自由度，因为一些重粒子在重整化的过程中被积掉，所以  $c$  沿着 RG 流是递减的。在其他偶数维也有相应的定理。例如，在四维量子场论和在六维的超对称理论中也证明了对应的定理。

式中系数  $c_{ij}^k$  通常为实数。从另一个角度看，这相当于这两个场在  $z \rightarrow w$  处融合成了新的场。能量-动量张量和场的 OPE 有以下固定形式

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w, \bar{w}) &\sim \frac{\Delta}{(z-w)^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w, \bar{w}) \\ \bar{T}(\bar{z})\phi(w, \bar{w}) &\sim \frac{\Delta}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\phi(w, \bar{w}) \end{aligned} \quad (1-93)$$

并且从能动张量的 OPE 中可以读出 CFT 的中心荷  $c$

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \quad (1-94)$$

虽然有了以上数据，我们就确定了一个 CFT，但是，对于凝聚态的应用来说，以上信息是远远不够的。其中一个最关键的问题，就是需要定义希尔伯特空间。我们还是从能动张量出发，将其在  $z = 0$  附近洛朗展开，则有

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2}L_n, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{z}^{-n-2}\bar{L}_n \quad (1-95)$$

其逆变换为，

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z), \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \quad (1-96)$$

注意到对于缩放变换  $z \rightarrow z/a$ ，有

$$L_{-n} \rightarrow a^n L_{-n} \quad (1-97)$$

实际上，算子  $L_n, \bar{L}_n$  在希尔伯特上生成了所有局域的共形变换。其中，最重要的  $L_0 + \bar{L}_0$  生成了所有的实空间缩放变换，即  $(z, \bar{z}) \rightarrow a(z, \bar{z})$ 。所以， $L_0 + \bar{L}_0$  通常被理解为 CFT 的哈密顿量或动量（对于二维时空的场论，时间和空间等效）。从式中不难得到算子的代数，即 Virasoro 代数<sup>[154]</sup>：

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}, \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}, \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \end{aligned} \quad (1-98)$$

式中  $c$  为 CFT 的中心荷。特别的，

$$[L_{\pm 1}, L_0] = \pm L_{\pm 1}, \quad [L_1, L_{-1}] = 2L_0 \quad (1-99)$$

数学上  $L_{\pm 1}, L_0$  生成了全局共形变换群。

接下来，我们通过  $L_n, \bar{L}_n$  即原生场  $\phi_j$  来构造出 CFT 的希尔伯特空间。首先，我们需要找到真空态，即凝聚态物理中的基态。凝聚态中，相变临界点被认为是

一个 CFT，那么它的基态显然需要满足共形对称性。即，真空需要被  $L_{\pm 1}, L_0$  湮灭

$$L_{-1}|0\rangle = L_0|0\rangle = L_1|0\rangle = 0 \quad (1-100)$$

再者，真空被能动张量作用上去得到的结果仍然要有很好的定义，这显然包含了  $z \rightarrow 0$  这一点。这要求  $T(z)|0\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n|0\rangle$  不发散，所以有

$$L_n|0\rangle = 0, \quad n \geq -1 \quad (1-101)$$

都成立。

接下来我们再将原生场  $\phi(z, \bar{z})$  算符作用到真空上，则有

$$|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \phi(z, \bar{z})|0\rangle \quad (1-102)$$

用共形维数标定产生的态的原因我们马上就会看到。由式易得

$$[L_n, \phi(z, \bar{z})] = \Delta(n+1)z^n \phi(z, \bar{z}) + z^{n+1} \partial \phi(z, \bar{z}), \quad n \geq -1 \quad (1-103)$$

不难发现

$$L_0|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \Delta|\Delta, \bar{\Delta}\rangle, \quad \bar{L}_0|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \bar{\Delta}|\Delta, \bar{\Delta}\rangle \quad (1-104)$$

$$L_n|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \bar{L}_n|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = 0, \quad n > 0 \quad (1-105)$$

因此，场的共形维数恰好对应态的共形维数。我们称之为场态对应。 $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle$  又称作最高权态。如果再将  $L_{-m}(m > 0)$  作用至最高权态上，即得到

$$|\Delta_{m_1, \dots, m_N}, \bar{\Delta}_{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_N}\rangle = L_{-m_1} L_{-m_2} \cdots L_{-m_N} \bar{L}_{-\bar{m}_1} \bar{L}_{-\bar{m}_2} \cdots \bar{L}_{-\bar{m}_N} |\Delta, \bar{\Delta}\rangle \quad (1-106)$$

不难发现

$$\begin{aligned} L_0|\Delta_{m_1, \dots, m_N}, \bar{\Delta}_{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_N}\rangle &= \left(\Delta + \sum_{n=1}^N m_n\right) |\Delta_{m_1, \dots, m_N}, \bar{\Delta}_{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_N}\rangle \\ \bar{L}_0|\Delta_{m_1, \dots, m_N}, \bar{\Delta}_{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_N}\rangle &= \left(\bar{\Delta} + \sum_{n=1}^N \bar{m}_n\right) |\Delta_{m_1, \dots, m_N}, \bar{\Delta}_{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_N}\rangle \end{aligned} \quad (1-107)$$

因此，我们将这些态称作原生场  $\phi(z, \bar{z})$  的派生态。所有的原生场态和派生态实际上对应于凝聚态体系中费米海以上的所有激发态。

以上我们实际看到了 Virasoro 代数表示的基本性质，从其一个表示论上我们可以得到二维共形场论中场的缩放维数（共形维度），在统计物理中，它们对应二维系统在二阶相变时相应的临界指数。值得注意的是， $c \leq 1$  的的么正体系（Virasoro 代数的么正表示）构成了二维临界行为的完整分类。这里我们忽略 Virasoro 代数的么正表示的推导过程，只列出结论。

对于具备有限数量的初级场的二维共形场论，我们称之为最小模型，可以通

过两个互质的数  $p, p'$  来标定, 记作  $\mathcal{M}_{p,p'}$ 。中心荷和共形维度由下式给出<sup>[154]</sup>:

$$c = 1 - 6 \frac{(p - p')^2}{pp'}, \Delta_{r,s} = \frac{(p'r - ps)^2 - (p - p')^2}{4pp'}. \quad (1-108)$$

从上式可以得到共形维度的一个对称性质:

$$\Delta_{r,s} = \Delta_{p-r, p'-s}. \quad (1-109)$$

或者我们可以将上式改写成

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}, \quad p = 3, 4, \dots \quad (1-110)$$

与相应的最高权重

$$\Delta_{r,s}(p) = \frac{[(p+1)r - ps]^2 - 1}{4p(p+1)}, 1 \leq s \leq r \leq p-1 \quad (1-111)$$

现在, 我们得到了一组有限的共形族, 这些族在融合规则下, 相应的有限共形维数  $h_{r,s}$  由  $1 \leq r < p$  和  $1 \leq s < p'$  给出。由对称性 (1-109) 给出

$$\phi_{r,s} = \phi_{p-r, p'-s} \quad (1-112)$$

因此, 在该理论中仍然存在  $(p-1)(p'-1)/2$  个不同的场。并且融合规则被修改为

$$\phi_{r,s} \times \phi_{m,n} = \sum_{k=1+|r-m|+r+m=1 \bmod 2}^{k_{\max}} \sum_{l=1+|s-n|+s+n=1 \bmod 2}^{l_{\max}} [\phi_{k,l}], \quad (1-113)$$

其中求和上限受到周期性和对称性控制。

$$k_{\max} = \min(r+m-1, 2p-1-r-m), l_{\max} = \min(s+n-1, 2p'-1-s-n). \quad (1-114)$$

Virasoro 代数的么正表示理论在研究二维临界现象中扮演的角色与有限李群的表示理论在其他物理学分支中扮演的角色类似。对于给定的 (二维) 统计力学模型的临界点, 两点关联函数可以确定该理论中一些算符的标度权重, 并且在许多情况下, 这足以确定 Virasoro 代数的相关表示。例如, 上述提到的  $c < 1$  么正体系与已知的统计力学系统的临界行为相匹配<sup>[158]</sup>。在下面我们将看到几个最小模型的例子以及如何确定在临界点处描述给定二维系统的 Virasoro 代数的特定表示。

虽然  $c < 1$  的离散系列区分了一组 Virasoro 代数的表示, 但这些表示是否可以通过容易构造的统计力学模型在它们的临界点上实现并不明显。在式 (1-110) 中的  $p = 3, 4, 5, 6$ , 即中心荷  $c = 1/2, 7/10, 4/5, 6/7$ , 分别与 Ising 模型, Ising 三重临界模型, 3 态 Potts 模型和三重点 3 态 Potts 模型的临界点相关联。其中第一个,  $m = 3$ , 我们将在下文中进行详细讨论。一般来说, 对于给定的  $c < 1$  的离散值,

可能存在多个对应的模型，这相当于所有允许的么正算符的不同子集。巧合的是，在大约同一时间，巴克斯托（Baxter）构造了一系列新的精确可解的 RSOS（受限实心-实心）类型的模型<sup>[159]</sup>。这些模型的临界点能够很直观的看出来，这为所有的  $c < 1$  离散值提供了特定的实现。RSOS 模型是用存在于正方形格点上的“高度”变量  $\ell_i$  来定义的。“高度”取一些离散值  $\ell_i = 1, \dots, m$ （这里的  $m$  是表征不同模型的整数参数），最近邻高度满足  $\ell_i = \ell_j \pm 1$  的限制。模型的 Boltzmann 权重是以一个正方形格点的四个“高度”间的相互作用为中心定义的，这些相互作用称为“面围绕相互作用”。每个模型在一个自对偶点有一个二阶相变。RSOS 模型的连续极限理论对应于一个 Virasoro 代数的实现，其中心荷为  $c = 1 - 6/m(m+1)$ <sup>[160]</sup>。例如，当  $m = 3$  时的最近邻约束使晶格分解为一个偶的次子晶格，在该晶格上对于所有的位点  $\ell_i = 2$  和一个奇的次子晶格，在该晶格上  $\ell_i = 1, 3$ 。偶次子晶格实际上没有耦合，并且在奇次子晶格上的两种状态对应的模型是 Ising 模型。<sup>①</sup>

现在我们详细探讨  $m = 3, c = 1/2$  与 Ising 模型在其临界点的联系。CFT 中的原生场由两个标度权重  $\Delta$  和  $\bar{\Delta}$ （其相关最高权状态在  $L_0$  和  $\bar{L}_0$  下的本征值）描述。最简单的可能性是考虑左右对称场  $\Phi_{p,q}(z, \bar{z}) = \varphi_{p,q}(z)\varphi_{p,q}(\bar{z})$ ，其共形权重为  $(\Delta, \bar{\Delta})$ 。根据关联函数，所有的原生场为<sup>②</sup>

$$\Phi_{1,1} : (0,0) \quad \Phi_{2,1} : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \Phi_{1,2} : \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \quad (1-115)$$

上面的  $(0,0)$  场在任何理论中都存在，可视为单位算符。Ising 模型中的自旋 ( $\sigma = \pm 1$ ) 的期望值可以视为序参量。该系统具有一个二阶相变，将  $h_\sigma \neq 0$  的高温 (无序) 相与  $h_\sigma = 0$  的低温 (有序) 相分离开来。在高温相中，序参量的二点函数会以指数方式衰减  $h_{\sigma_n} h_{\sigma_0} \sim \exp(-|n|/\xi)$ ，其中关联长度  $\xi$  取决于温度 (我们可以将  $\xi^{-1}$  视为理论的质量)。在临界点，关联长度发散 (质量项为 0)，二点函数将以幂律方式衰减。

$$\langle \sigma_n \sigma_0 \rangle \sim \frac{1}{|n|^{d-2+\eta}}, \quad (1-116)$$

其中  $d$  为系统的维数，该表达式定义了临界指数  $\eta$ 。另一个指数  $\nu$  可以用临界点的四点关联函数（能量密度的关联函数）来定义<sup>③</sup>：

$$\langle \varepsilon_n \varepsilon_0 \rangle \sim \langle \sigma_n \sigma_{n+1} \sigma_0 \sigma_1 \rangle \sim \frac{1}{|n|^{2(d-1/\nu)}}, \quad (1-117)$$

① 对于其他 RSOS 类型的模型，其临界点也由 Virasoro 代数的么正表示描述，其中  $c < 1$ ，但其与 Potts 模型所包涵的原生场（相应的算符）略有不同。例如，当  $(m = 5, c = 4/5)$  时 RSOS 模型处于四重临界 Ising 模型的普适类中，而 Potts 模型中的一个模型具有相同的中心荷，但却处于三态 Potts 模型的普适类中（这两个分别可以对应到 Dynkin 图中的  $A_5$  和  $D_4$  类）。

② 这是该理论在环面上的唯一允许可能性，符合模不变性。

③ 更准确地说， $\varepsilon_n$  应该是在  $n$  的所有最近邻站点上平均，在这里我们采取任何一个最近邻也是可以的。

通过解析或者数值的方法可以得到的二维伊辛模型的临界指数为  $\eta = 1/4, \nu = 1$ 。因此, 2 点函数的行为为

$$\langle \sigma_n \sigma_0 \rangle \sim \frac{1}{|n|^{1/4}} \sim \frac{1}{r^{2\Delta_\sigma^S}}, \quad (1-118)$$

其中算符(场)缩放维数为  $\Delta_\sigma^S = \Delta_\sigma + \bar{\Delta}_\sigma$  和自旋为  $s_\sigma = \Delta_\sigma - \bar{\Delta}_\sigma = 0$ , 因为通常是左右对称场。我们可以看到  $\Delta_\sigma^S = 2\Delta_\sigma = 2\bar{\Delta}_\sigma = 1/8$ , 因此式(1-115)中的  $(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$  场应该被认为是伊辛模型中的自旋  $\sigma$ 。另一方面, 能量算符满足

$$\langle \varepsilon_n \varepsilon_0 \rangle \sim \frac{1}{|n|^{2\Delta_\varepsilon^S}}. \quad (1-119)$$

由于(1-117)中有  $\nu = 1$ , 因此它的缩放权重可以被认为是  $d - 1/\nu = 1 = \Delta_\varepsilon^S = \Delta_\varepsilon + \bar{\Delta}_\varepsilon$ 。因此, 式(1-115)中的  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  场被认为是伊辛模型的能量密度算符。至此, 我们完成了 Ising 模型所有原生场的识别。

我们可以通过  $\sigma \leftrightarrow \mu$  的 Kramers-Wannier 对偶, 发现  $\sigma$  和  $\mu$  有相同的共形维数。

从  $\mathcal{M}_{p=3}$  中的融合规则可以读出为

$$\sigma \times \sigma = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \times \varepsilon = 1, \quad \sigma \times \varepsilon = \sigma \quad (1-120)$$

此外, 使用 OPE 的结合律, 可以推导出<sup>①</sup>

$$\psi(z)\sigma(w, \bar{w}) \sim \frac{1}{(z-w)^{\frac{1}{2}}} \mu(w, \bar{w}). \quad (1-121)$$

我们可以将其与 Ramond 扇区中自由费米子的模展开形式进行比较

$$\psi(z)\sigma(0) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} z^{-r-\frac{1}{2}} b_r \sigma(0) \quad (1-122)$$

我们可以推断  $\mu(0) = b_0 \sigma(0)$  在原点处存在自旋场  $\sigma(0)$  的情况下, 费米子场服从反周期边界条件

$$\psi(z) \rightarrow \psi(e^{2\pi i} z) = -\psi(z) \quad (1-123)$$

即自旋场  $\sigma$  会导致一个场的叉分割, 改变费米子场的边界条件。因此, 在这个意义上,  $\sigma$  可以被视为费米子场理论中的扭曲算符。

以上我们详细探讨了么正的最小模型。事实上, 在式(1-108)中,  $p, p'$  取差值较大的互质数时, 中心荷会变成负数, 同样的, 一些共形维度也会变为负的。其实, 这样我们得到的是最小非么正模型。一个最简单但特别重要的例子是  $(p', p) = (2, 5)$  的中心荷  $c = -22/5$  的模型  $\mathcal{M}_{2,5}$ , 该模型称为杨李模型, 或者是杨李边缘奇点模

<sup>①</sup> 自由(实)费米子场理论也是一个  $c = 1/2$  的 CFT, 其与 Ising CFT 还具有相同的配分函数。在这里我们并不打算详细介绍自由费米子 CFT, 因为它还涉及到很多弦论的知识, 有兴趣的读者可以参考弦论的经典教材<sup>[161]</sup>。值得一提的是, Ising CFT 和自由费米子是最简单的两个么正共形场论的例子。

型。该理论中的原生场包括恒等算符和一个共形维数为  $\Delta = -1/5$  的场  $\phi_{1,2}$ 。

该模型考虑在外部磁场  $B$  存在的情况下给定温度  $T$  的伊辛模型：

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i \quad (1-124)$$

杨李定理<sup>[41-42]</sup>表明，该模型的配分函数  $\mathcal{Z}$  的零点都在虚轴  $\text{Re } B = 0$  上。费舍尔 (M. A. Fisher) 证明了点  $B = \pm iB_c$  是该理论的新临界点<sup>[43]</sup>，称为 YL 边缘奇点。此外，他认为该理论的有效作用量由 Landau-Ginzburg 理论给出

$$S_{YL} = \int d^2z \left[ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + i(B - B_c)\phi + ig\phi^3 \right] \quad (1-125)$$

其中  $\phi$  为（实数）标量场，而并非为原生场。模型的非么正性体现在耦合常数的虚值上。通过经典-量子对应，可以将(1-124)式映射到一个横场 Ising 模型，其中磁场项对应 Zeeman 项。虚的磁场也揭示了该模型的非厄米性。

杨李模型作为第一个被确定的非么正共形场论以及可解的非厄米强关联模型，为我们打开了研究非厄米奇异现象的大门。

### 1.3 总结及与其他章节的联系

本章主要介绍了非厄米物理的基本概念，以及后文研究内容所涉及的概念。在第 2 章中，我们研究了一个非厄米格点模型，并探讨其作为 1+1 维手征费米子的格点实现的可能性。由于该章相对独立，相关概念将在第 2 章正文中被详细介绍。在第 3 章中，我们研究了一个一般性的非厄米费米子格点模型在具有能谱奇异点时的纠缠特性，相关概念有纠缠熵，这在第 1.1 节被介绍，所需要的自由费米子纠缠熵的计算方法在第 1.1.4 小节有详细推导；还有二维共形场论的概念在 1.2.2 小节有简单说明。在第 4 章中，量子开放系统相关概念及其方法在第 1.0.6 小节有简介，含时纠缠熵的计算是 1.1.4 小节的引申，具体方法会在正文中介绍。最后的玻色化方法则可以完全参照 1.2.1 小节的方法。

## 第 2 章 1+1 维手征费米子的非厄米格点模型

一般认为，单个的手征费米子无法在格点上单独存在。这是一种量子反常的体现。一种传统的看法是将该一维系统作为拓扑非平庸的二维体态的边界。在本章节中，我们将提出一个关于 1+1D 手征费米子的格点模型，它是一个简单的非厄米二次型哈密顿量。我们将使用各种方法证明该模型具有与连续介质理论相同的手征反常和引力反常。此外，在适当的参数下，该模型的低能有效理论仍然是么正的手征费米子量子场论。该方法能够成功的本质原因是由于哈密顿流算符的非厄米性，这使得具有相反手性的，作为加倍子存在的另一支费米子模式迅速衰变。

### 2.1 简介

格点模型作为量子场论的离散化形式，在粒子物理学和凝聚态物理学中发挥着无可替代的作用。在粒子物理学中，格点模型被认为是正规化连续统量子场论的“最物理”方式。在凝聚态物理学中，特别是对于固体系统，格点模型被认为是更接近“微观”现实的理论模型。然而，量子场论的格点和连续公式之间的关系可能非常微妙和复杂，特别是在处理两个公式中所谓的拓扑性质时。

在数学中，拓扑性质被定义为在连续变形下保持不变的性质。但是，在离散形式中定义拓扑属性并非不可能。另一方面，文献中确实有一个在格点上实现手征费米子的不可行定理：根据著名的尼尔森-二宫（Nielsen-Ninomiya<sup>[162]</sup>）定理，只要是厄米的，并且保持手性对称性和局域性的哈密顿量，1+1 维的手征费米子理论在方形格点上就不能通过该哈密顿量单独实现。

事实上，人们已经意识到，这个不可行定理背后的原因与所谓的量子反常密切相关，包括手征反常<sup>[163-164]</sup>和引力反常<sup>[165]</sup>。不可行定理<sup>[162]</sup>表明，伴随着每个手征费米子模式，总是有另一个（所谓的“加倍”）费米子模式，其具有相反的手性，会在格点模型中自然涌现出来。它总是抵消前者的量子反常。这被称为“费米子倍增”现象，这其实是尼尔森-二宫定理的本质。为避免费米子倍增问题，常规方式是通过作为  $(d+1)$  维无量子反常的格点模型的边界来实现  $d$  维具有量子反常的量子场论的格点化。例如，一个 1+1 维的手征费米子可以通过与一个二维整数量子霍尔系统相耦合而成为后者的边界来实现<sup>[166]</sup>。这里，体态霍尔电导引起的反常流从体态流向边界，从而确保了整个体加边界系统中的荷守恒。

也有很多其他的研究，试图将手征费米子作为独立模型在晶格上实现，而不

是作为某个体理论的边界。但是，这通常需要一些额外的复杂度和限制条件：要么手征对称性被破坏<sup>[167-168]</sup>，要么需要使用非局域哈密顿量<sup>[169-170]</sup>；亦或者，可以添加某些类型的相互作用<sup>[171-174]</sup>，或需要一些额外的非平庸体态<sup>[175]</sup>等等。

在本章中，我们将致力于开发一种新的“独立”的（1+1 维）手征费米子的格点模型。既没有二维体态的约束，也没有上述任何额外的复杂性。我们的想法是探索使用非厄米性的哈密顿量来描述一个一维格点模型的手征费米子，以此来破坏尼尔森-二宫定理的一个关键前提条件。近年来，非厄米系统的研究在理论物理学界引起了很多关注，例如参考文献<sup>[64,80,85,170,176-184]</sup>中的研究。

更具体地说，我们考虑一维手征费米子最简单的格点模型，它只跳跃到左边最近的相邻位置。即我们将费米子场的空间导数离散化如下：

$$\Psi_L^\dagger \partial_x \Psi_L \rightarrow \frac{1}{a} c_{L,j}^\dagger [c_{L,j+1} - c_{L,j}]. \quad (2-1)$$

因此，相对应的跃迁哈密顿量是非厄米的。我们将展示，在适当的参数范围内，这种非厄米格点模型能够实现在同一空间，即  $d$  维实空间中，存在量子反常的连续介质理论。

我们将本文组织如下。首先，在 2.2 小节中，我们简要回顾一维手征费米子的手征反常和引力反常理论。然后，在 2.3 节中，我们构造了一个左手手征费米子的非厄米一维格点模型。我们将从多个方面证明我们的模型具有这两种反常，这将在 2.4 和 2.5 小节中展示。我们看到一个在连续极限和低能区域内稳定的手征费米子场论也在模型中出现。最后，在 2.6 小节在我们检查了手征费米子对扰动的稳定性。我们的模型提供了一种利用非厄米性在格点模型中实现同一空间维数内的量子反常的方法。除了自发对称性破缺外，我们的研究可能为一些具有非零手性的自然现象提供了一种新的起源。

## 2.2 手征费米子手征反常和引力反常简介

闵可夫斯基空间中 1+1 维手征费米子场论的作用由

$$S = \int dt dx i \bar{\Psi}(x, t) (\gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu)) \Psi(x, t) \quad (2-2)$$

给出，其中我们取费米子速度  $v_F = 1$ ,  $\gamma^1 = -i\sigma_2$ ,  $\gamma^0 = \sigma_1$ ,  $\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma_3$ ,  $\mu = 0, 1$ ,  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ , . 通过投影狄拉克旋量  $\Psi(x, t) = (\Psi_R(x, t), \Psi_L(x, t))^T$  与投影算子  $P_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)/2$ 。手性由  $\gamma_5$  的特征值给出，对于  $\Psi_L(x, t)$  为 -1，对于  $\Psi_R(x, t)$  为 +1。

### 2.2.1 手征反常

我们考虑欧几里得空间中的理论。欧几里得作用是

$$S_E = \int d\tau dx i\bar{\Psi}(x, \tau)(\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu))\Psi(x, \tau) \quad (2-3)$$

其中  $\gamma^2 = i\gamma^0 = i\sigma_1, A_2 = -iA_0, x^2 = \tau = it, \mu = 1, 2, \bar{\Psi} = \Psi^\dagger$ . 它在无穷小手性变换下是不变的:

$$\Psi(x, \tau) \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5)\Psi(x, \tau), \bar{\Psi}(x, \tau) \rightarrow \bar{\Psi}(x, \tau)\exp(i\alpha\gamma_5). \quad (2-4)$$

根据诺特定理, 这导致了守恒的轴向流  $j_5^\mu(x, \tau) = \bar{\Psi}(x, \tau)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(x, \tau)$  and  $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ .

然而, 轴向流在量子水平上并不真正守恒, 因为配分函数在手性变换下不是不变的; 这种现象称为手征反常。可以通过进行局部手性变换来观察手征反常, 其中式子 (2-4) 中的参数  $\alpha$  变为  $\alpha(x, \tau)$ 。那么路径积分测度  $d\mu = \Pi_x \mathcal{D}[A_\mu(x)]\mathcal{D}[\Psi(x)]\mathcal{D}[\bar{\Psi}(x)]$  转换为:

$$d\mu \rightarrow d\mu \exp[-2i \int d\tau dx \alpha(x, \tau) \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n] \quad (2-5)$$

其中  $\varphi_n$  是欧几里得狄拉克算子  $\tilde{\mathcal{D}}$  的正交特征向量, 特征值为  $\lambda_n$ 。以 Ward-Takahashi<sup>[185]</sup>, 我们有

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2i \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n \quad (2-6)$$

手征反常实际上与阿蒂亚-辛格 (Atiya-Singer) 指标定理有关<sup>[186]</sup>:

$$\text{index}(\tilde{\mathcal{D}}_R) = n_+ - n_- = \int dx d\tau \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n = -\frac{1}{2\pi} \int dx d\tau F, \quad (2-7)$$

其中  $\text{index}(\tilde{\mathcal{D}}_R)$  是  $\tilde{\mathcal{D}}_R$  的指标。  $n_\pm$  分别是具有手性  $\chi = \pm 1$  的  $\tilde{\mathcal{D}}$  的零模数。  $F$  是  $U(1)$  规范场的场强。等式 (2-7) 可以证明如下。第一个等号是  $\tilde{\mathcal{D}}_R$  的指标定理。对于第二个等号, 由于  $\{\tilde{\mathcal{D}}, \gamma_5\} = 0$ , 我们有

$$\lambda_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n = \varphi_n \gamma_5 \tilde{\mathcal{D}} \varphi_n = -\varphi_n^\dagger \tilde{\mathcal{D}} \gamma_5 \varphi_n = -\lambda_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n. \quad (2-8)$$

因此, 只有  $\tilde{\mathcal{D}}$  的零模式  $\varphi_n^0$  对总和有贡献。具有手性  $\pm 1$  的零模式分别表示为  $\varphi_{n\pm}^0$ , 即

$$\gamma_5 \varphi_{n\pm}^0 = \pm \varphi_{n\pm}^0, \quad (2-9)$$

由此

$$\int dx d\tau \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n = \int dx d\tau \sum_n \varphi_{n+}^{0\dagger} \varphi_{n+}^0 - \int dx d\tau \sum_n \varphi_{n-}^{0\dagger} \varphi_{n-}^0 = n_+ - n_- \quad (2-10)$$

然后通过使用藤川 (Fujikawa) 正规化<sup>[187]</sup>, 可以得到

$$\int d\tau dx \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F. \quad (2-11)$$

藤川的正规化过程是插入一个因子  $\exp(-\frac{\not{D}^2}{M^2})$  得到一个正规化的和  $\sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \exp(-\frac{\not{D}^2}{M^2}) \varphi_n, M \rightarrow \infty$ 。它可以通过对  $\varphi_n(x, t)$  进行傅里叶变换  $\tilde{\varphi}_n(k)$  来计算。 $U(1)$  场强项  $F$  来自对易子  $[D_\mu, D_\nu] = -iF_{\mu\nu}$ 。最后, 通过重新缩放  $k \rightarrow Mk$ , 可以得到:

$$\sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n = M^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-k^\mu k_\mu} \text{Tr}(\gamma_5 \exp(\frac{i\gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}}{2M^2})) = -\frac{1}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2-12)$$

请注意, 根据指标定理,  $\text{index}(\tilde{D}_R)$  是一个拓扑数。<sup>①</sup>

轴向流的非守恒方程 (2-6) 只是指标定理的局部版本: 通过对两边进行积分, 有

$$\int d^2 x \partial_\mu j_5^\mu = 2(n_+ - n_-) = 2 \text{index}(\tilde{D}_R) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F. \quad (2-13)$$

因此,  $\text{index}(\tilde{D}_R)$  是手征反常的指标。

另一种广泛使用的方法来验证闵可夫斯基空间中的手征反常是将系统放在一维环上, 研究系统在规范通量绝热的从 0 到  $2\pi$  增加下穿过环的谱流。在闵可夫斯基空间中, 手征对称性的守恒荷为

$$Q_5 = \int dx j_5^0 = \int dx (\psi_R^\dagger \psi_R - \psi_L^\dagger \psi_L) = (Q_R - Q_L) \quad (2-14)$$

一方面, 由于手性对称性, 轴向荷在该过程中应守恒。另一方面, 正如式 (2-13) 所示, 手性理论的轴向荷在通量插入后会随手性而改变。并且, 轴向荷的变化可以通过计算在绝热过程中有多少状态穿过零能量 (即谱流) 来证明。

### 2.2.2 引力反常

引力反常是指配分函数在微分同胚变换下非不变的现象。根据共形场论 (CFT)<sup>[188]</sup>, 二维环面上的复手征费米子 (两个马约拉纳费米子) 的配分函数由下式给出

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{tr}(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}}) \quad (2-15)$$

其中  $L_0(\bar{L}_0)$  是全纯 (反全纯) 部分的 Virasoro 代数的生成元;  $c$  和  $\bar{c}$  分别是全纯和反全纯部分的中心荷。我们规定左移的自由费米子有  $\bar{c} = 1$ , 而右移的自由费米子

① 只要规范场  $F$  处在相同的拓扑等价类。

有  $c = 1$ 。  $q = e^{2\pi i \tau}$  是一个参数，其中  $\tau$  是表征环面的复数单位<sup>①</sup>。

$$\tau \sim \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{with} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (2-16)$$

描述相同的环面，因此配分函数在模变换下应该是不变的。在特殊的模变换  $T : \tau \rightarrow \tau + 1$  下，配分函数变为

$$Z \rightarrow Z \exp\left(2\pi i \frac{c - \bar{c}}{24}\right). \quad (2-17)$$

由于左移复费米子理论的手性中心荷为  $c_- := c - \bar{c} = -1$ ，其配分函数在  $T$  变换下是非不变的。我们说这个理论有引力反常。

### 2.3 格点模型及其能谱

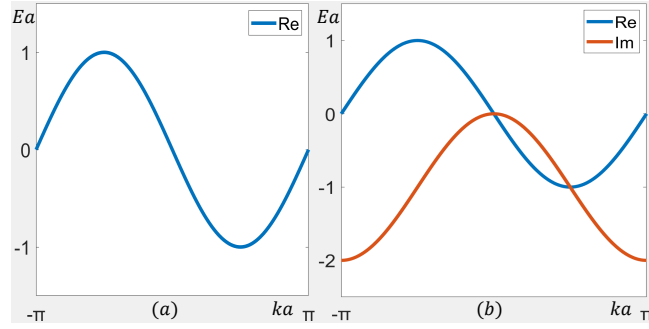


图 2-1 图中展示了具有周期边界条件和  $A_1 = 0$  的 (a) 对称格点模型和 (b) 定向格点模型的能量色散关系。其中蓝线和红线分别代表能量的实部和虚部。

现在我们为左移费米子构建一个格点哈密顿量模型。我们假设 1d 空间维度被离散化为格点常数为  $a$  的圆上的一组  $N$  个点，而时间保持连续。回想一下，要离散化的左移费米子的连续哈密顿量由下式给出

$$H_L = \int dx \Psi_L^\dagger(x, t) [i\partial_x - A_1] \Psi_L(x, t), \quad (2-18)$$

其中，为了以后计算手征反常的方便，我们引入了规范势： $A_0 = 0, A_1 = A_1(t)$ 。相应的格点哈密顿量由以下步骤构造：

(1) 替换在 Heisenberg 图像中场算子  $\Psi_{L(R)}(x, t)$ ,  $\Psi_{L(R)}^\dagger(x, t)$  至 Schrödinger 图像中费米子的湮灭和产生算符  $c_{L(R),j}$ ,  $c_{L(R),j}^\dagger$ ，即

$$\Psi_{L(R)}(x, t) \rightarrow c_{L(R),j} \quad \Psi_{L(R)}^\dagger(x, t) \rightarrow c_{L(R),j}^\dagger, \quad (2-19)$$

其中  $j$  是格点指标。我们将在以下讨论中施加周期性边界条件

$$c_{L(R),N+j} = c_{L(R),j} \quad c_{L(R),N+j}^\dagger = c_{L(R),j}^\dagger; \quad (2-20)$$

①  $\tau$  因模变换而不同

对于反周期边界条件，本文的主要结果在定性上相同。

(2) 规范场由跳跃项中的相位因子引入

$$e^{iaA_1} c_{L(R),j}^\dagger c_{L(R),j+1}. \quad (2-21)$$

(3) 将微分算子  $\partial_1$  替换为格上差分算子。不同的选择会产生不同的格点模型。一般来说，差分算子可以表示为

$$\frac{1}{a} [\lambda(c_{L,j+1} - c_{L,j}) + (1 - \lambda)(c_{L,j} - c_{L,j-1})]. \quad (2-22)$$

等式 (2-1) 对应于  $\lambda = 1$  的情况。如介绍中所述，这样的选择可以以非厄米哈密顿量为代价避免“费米子倍增”问题。为了证明这一点，我们将简要回顾费米子倍增问题是如何在将其离散化为格点模型的传统方法中出现的。在传统方法中，选择对称的  $\lambda = 1/2$ ，它给出

$$\psi_L^\dagger \partial_x \psi_L \rightarrow \frac{1}{2a} c_{L,j}^\dagger [c_{L,j+1} - c_{L,j-1}], \quad (2-23)$$

并导致厄米的哈密顿量

$$H_{\text{sym}} = \frac{i}{2a} \left( \sum_{j=1}^{N-1} e^{iaA_1} c_{L,j}^\dagger c_{L,j+1} - \sum_{j=2}^N e^{-iaA_1} c_{L,j}^\dagger c_{L,j-1} + e^{iaA_1} c_{L,N}^\dagger c_{L,1} - e^{-iaA_1} c_{L,1}^\dagger c_{L,N} \right). \quad (2-24)$$

在下文中，我们把这种差分算子和相应的模型称为对称差分算子和对称格点模型。如果  $A_1$  被看作是一个与时间无关的常数，频谱可以表示为

$$E_k^{\text{sym}} = -\sin((k + A_1)a)/a, \quad (2-25)$$

其中  $k = \frac{2\pi n}{Na}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 上标“sym”代表“对称”。

然而，这个格点模型存在费米子倍增问题，即除了在  $k \sim 0$  附近的一个左移分支外，还有一个在  $k \sim \pi/a$  附近的第二个（或倍增）费米子，如图 2-1(a) 所示。由于  $c_{L,j} = \frac{(1-\gamma_5)}{2} \psi_j$ ，相应的手性  $\chi$  必须为 -1。然而，倍增费米子的能量与动量成正比，这表明它是“右移”的。因此，哈密顿量的能谱不是手性的，即它由两个左移和倍增费米子的分支组成。

如果我们以  $Na = L$  有限的方式取连续极限  $a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ ，则已知出现的倍增右移费米子对手征反常有一个贡献，这个贡献恰好抵消了原始的左移费米子的贡献。因此，在由对称哈密顿量 (2-24) 定义的离散化模型中，连续模型 (2-18) 中的非零手征反常没有被重现。这就是 Nielsen-Ninomiya 定理的实质。

人们可以放弃厄米性的限制来规避 Nielsen-Ninomiya 定理<sup>[189-190]</sup>。这可以用基于庞加莱-霍普夫 (Poincaré-Hopf) 关于 Nielsen-Ninomiya 定理的证明来理解<sup>[189]</sup>。根据该定理，手征费米子的一维格点模型中所有孤立零模的指标之和为 0。对于局

部的、厄米的、平移不变的模型，孤立零模的指标对于左移费米子和右移费米子分别定义为 1 和 -1。因此，必须具有相等数量的左移和右移费米子才能保证指标之和为零。然而，对于非厄米系统，孤立零模的指标为 0，与零模的手性无关。因此，在非厄米的格点模型中只有一个左移费米子是可能的。

由于系统的  $\mathcal{PT}$  对称性保证了一个实谱，而我们需要一个复的谱来避免 Nielsen-Ninomiya 定理，因此我们必须明确地打破  $\mathcal{PT}$  对称性，以获得描述手征费米子的哈密顿量。在我们的例子中，宇称和时间反转变换分别定义为

$$\begin{aligned} P : c_{L,j} &\rightarrow c_{L,N+1-j} & c_{L,j}^\dagger &\rightarrow c_{L,N+1-j}^\dagger \\ T : c_{L,j} &\rightarrow c_{L,j} & c_{L,j}^\dagger &\rightarrow c_{L,j}^\dagger & i &\rightarrow -i. \end{aligned} \quad (2-26)$$

容易看出对称哈密顿量 (2-24) 是  $\mathcal{PT}$  对称的。当  $\lambda = 1$  时，(2-1) 导致了非厄米格点模型

$$H_L = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{i}{a} e^{iaA_1} c_{L,j}^\dagger c_{L,j+1} - \sum_{j=1}^N \frac{i}{a} c_{L,j}^\dagger c_{L,j} + \frac{i}{a} e^{iaA_1} c_{L,N}^\dagger c_{L,1}. \quad (2-27)$$

由于此哈密顿量明确地破坏了  $\mathcal{PT}$  对称性，因此得到复数谱也就不足为奇了：

$$E_k^L = \frac{i}{a} (e^{ia(k+A_1)} - 1). \quad (2-28)$$

该模型将在下文中称为定向格点模型，我们将证明它确实描述了在适当条件下自由左移的费米子。

通过对模型进行奇偶变换，可以得到自由右移费米子的模型 (2-27)，

$$H_R = \sum_{j=2}^N \frac{i}{a} e^{-iaA_1} c_{R,j}^\dagger c_{R,j-1} - \sum_{j=1}^N \frac{i}{a} c_{R,j}^\dagger c_{R,j} + \frac{i}{a} e^{-iaA_1} c_{R,1}^\dagger c_{R,N}, \quad (2-29)$$

其中我们将下标  $L$  替换为  $R$  以指示它用于右移费米子。其能谱为：

$$E_k^R = \frac{i}{a} (e^{-ia(k+A_1)} - 1), \quad (2-30)$$

其中  $k = \frac{2\pi n}{Na}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ 。其谱的实部与 (2-28) 相反，而这两个哈密顿量的虚部相同。哈密顿量 (2-29) 也可以通过选择  $\lambda = 0$  的不同差分算子从右移费米子场论推导出来

$$\Psi_R^\dagger \partial_x \Psi_R \rightarrow \frac{1}{a} c_{R,j}^\dagger [c_{R,j} - c_{R,j-1}]. \quad (2-31)$$

对于非厄米系统，有必要引入所谓的双正交基<sup>[191]</sup>。在通常的厄米情况下，本征态的正交性由哈密顿量的封闭性保证。然而，非厄米哈密顿量的本征态通常彼此不正交。相反，对于一般的非厄米运算符  $A$ ，可以使用所谓的双正交基<sup>[191]</sup>，它由左特征向量  $\{\langle v_n' | \}$  和右特征向量  $\{| v_n \rangle\}$  组成，并满足以下方程，

$$A|v_n\rangle = \lambda_n|v_n\rangle \quad \langle v_n'|A = \lambda_n\langle v_n'| \quad \langle v_n'|v_m\rangle = \delta_{n,m} \quad (2-32)$$

(2-32) 中的第二个方程意味着左特征向量的厄密共轭是  $A^\dagger$  的特征向量

$$A^\dagger|v_n'\rangle = \lambda_n^*|v_n'\rangle \quad (2-33)$$

双正交基在我们接下来的讨论中也起着重要的作用。我们现在将关注哈密顿量 (2-27) 及其谱。类似的分析可以很容易地应用于右移哈密顿量 (2-29)。对于费米子理论，具有复能量  $E_k$  的费米子的传播子由  $G(k, \omega) = 1/(\omega - \text{Re}E_k - i\text{Im}E_k)$  给出。这表明能量的实部  $\text{Re}E_k$  对应于粒子的普通能量，而负的虚部  $\text{Im}E_k$  可以看作是寿命的倒数，或者说由于与环境的耦合而导致的粒子损失率。虚能量  $\text{Im}E_k$  也可以通过考虑右本征态  $|\psi_k\rangle$  的时间演化来理解

$$|\psi_k(T)\rangle = e^{-iHT}|\psi_k\rangle = e^{-i\text{Re}(E_k)T}e^{\text{Im}(E_k)T}|\psi_k\rangle. \quad (2-34)$$

在系统中找到粒子的概率为，

$$\langle\psi_k'(T)|\psi_k(T)\rangle = e^{2\text{Im}(E_k)T}, \quad (2-35)$$

如果能量的虚部为负，则表示其随时间衰减。<sup>①</sup>

能量的实部  $\text{Re}E_k$  在对称模型和定向模型中表现相似。这意味着我们的（定向）模型仍然在  $k \sim 0$  处有一个向左移动的费米子，在  $k \sim \pi/a$  处有一个（加倍）向右移动的费米子。然而，这两种费米子模式的寿命截然不同。对于左移费米子和加倍费米子，我们有

$$E_{0,k}^L \sim -k(1 + ika/2), \quad E_{\pi,k}^L \sim k(1 - 2i/ka), \quad (2-36)$$

其中  $E_0^L$  和  $E_\pi^L$  分别代表左移费米子和加倍费米子的能量。因此，如果  $a$  足够小，左移费米子的寿命比加倍费米子的寿命长得多。而在连续极限  $a \rightarrow 0$  下，左移费米子的寿命是无限的，而加倍费米子的寿命为零。这表明格点哈密顿量将减少为哈密顿量 (2-18) 对于连续极限和低能量状态下的手征费米子。此外，在连续极限和低能量状态下出现了  $\mathcal{PT}$  对称性，这保证了我们上面讨论的连续理论的实谱。

## 2.4 手性和手征对称性

在本节中，我们将通过两种方法（谱流和指标定理的格点版本）在我们的格点模型中验证手征反常。

<sup>①</sup>  $\langle\psi_k'(T)|$  是左本征态。 $T_0 = -1/\text{Im}(E_k)$  可以理解为费米子的寿命。在物理上，这种损失是由于系统与其环境之间的耦合而发生的。

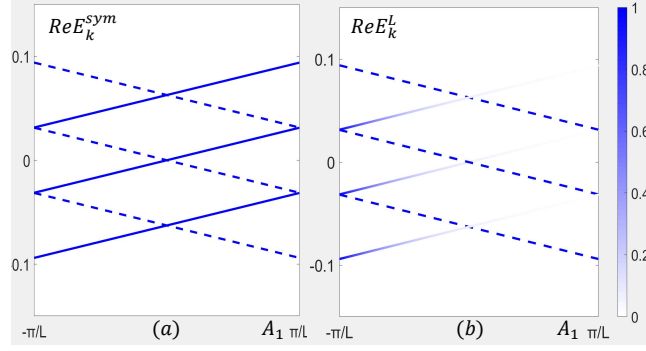


图 2-2 图 (a) 和 (b) 展示了在对称和定向晶格模型下，当  $A_1$  从  $-\pi/L$  到  $\pi/L$  进行绝热演化时，谱的演化过程。每一条分支表示某个本征态随着规范场的变化而产生的能量变化。左移费米子用虚线表示，加倍的费米子用实线表示。线颜色深浅表示这些状态的观测概率。这里我们设  $a = 1$ ,  $N = 100$ 。

### 2.4.1 能谱流

如第 2.2.1 节所讨论的那样，谱流是检测手征反常的常用方法。为了观察谱流，我们从时间  $t = 0$  开始，缓慢地将  $A_1$  从  $-\pi/L$  变化到  $t = T$  时的  $\pi/L$ ，并检查费米子的能量如何随  $A_1$ （因此随时间）变化。这里我们选择  $L = Na$ ，其中  $N$  是格点数的总数。 $T$  应足够大以实现绝热过程。对称和定向格点模型的谱流如图 2-2 (a) 和 (b) 所示，其中我们选择  $a = 1, N = 100$ 。请注意，在定向格点模型的情况下，费米子的能量对应于谱的实部  $\text{Re}E_k^L$ ，如前一节所讨论的那样，而费米子的寿命，由谱的虚部  $\text{Im}E_k^L$  跟踪，用线的颜色深浅表示。对于给定的  $A_1$ ，两个模型中费米子的能量相同，并且为

$$E_k^{\text{sym}} = \text{Re}(E_k^L) = -\sin((k + A_1)a)/a,$$

其中  $k = \frac{2\pi n}{Na}$ 。在图中，我们仅描绘能量接近零的状态的演化，即三个左行态（虚线） $n = -1, 0, 1$  和三个加倍费米子态（实线） $n = 49, 50, 51$ 。

正如第 2.2.1 节所讨论的那样，物理上，改变  $A_1$  相当于缓慢地在环的中心插入一个  $2\pi$  通量。手征反常要求插入通量后费米子的总数应减少 1。然而，对于对称格点模型，加倍费米子数增加 1，左行费米子数减少 1，因此费米子的总数是不变的。因此，对称格点模型没有手征反常。对于定向格点模型，有一个额外的时间相关衰减因子  $e^{2T\text{Im}E}$ 。当  $T$  足够大时，即  $T \gg a$  但不是太大，即  $T \ll l_0^2/a$  时，其中  $l_0$  是某个有限的红外截断长度尺度，左行费米子几乎不受影响，但加倍费米子会随着时间演化迅速消失，如图 2-2 (b) 所示。这种情况下，插入磁通后费米子总数减少 1，与正确的手征反常(2-18)一致。

红外截断  $l_0$  被选择为小于  $L$ ，以确保只有在  $k = 0$  附近的模式在时间演化中存活。我们还选择将其与  $L$  成比例，以确保在热力学极限  $L \rightarrow \infty$  下趋于无穷大，与式(2-18)一致。

### 2.4.2 指标定理

为了证明我们的格点模型确实具有与连续理论中相同的手征反常，我们将在本节中研究非厄米格点算子  $\not{D}_R$  的指标。我们将在欧几里得时空中进行计算。通过类似于格点哈密顿量 (2-27) 和 (2-29) 的推导，狄拉克费米子在一维空间格点上的欧几里得作用量为

$$S_E = \int d\tau i \bar{\Psi} \not{D} \Psi, \quad (2-37)$$

其中  $\Psi = (\Psi_R, \Psi_L)^T = ((c_{R,1}, \dots, c_{R,N}), (c_{L,1}, \dots, c_{L,N}))^T$ ,  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger$ , 和  $c_{L(R),j}$  是上一节介绍的费米子的费米子湮灭算符。狄拉克算子的格点版本由下式给出

$$\not{D} := \gamma^1 \begin{pmatrix} D_1^R & 0 \\ 0 & D_1^L \end{pmatrix} + \gamma^2 \partial_\tau = \begin{pmatrix} 0 & -D_1^L + i\partial_\tau \\ D_1^R + i\partial_\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad (2-38)$$

其中协变导数运算符  $D_1^{L/R}$  是具有矩阵元素的  $N \times N$  矩阵

$$D_{1,i,j}^L = \frac{e^{iaA_1} \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j}}{a}, \quad D_{1,i,j}^R = -\frac{e^{-iaA_1} \delta_{i-1,j} - \delta_{i,j}}{a} \quad (2-39)$$

其中  $i$  和  $j$  是格点的指标。特别地,  $D_{1,N,1}^L = \frac{1}{a} e^{iaA_1}$  和  $D_{1,1,N}^R = -\frac{1}{a} e^{-iaA_1}$ 。在这里, 我们还使用了周期性边界条件。请注意  $\not{D}$  也是一个非厄米运算符。因此, 我们引入双正交基  $\{\varphi_n\}$  和  $\{\varphi'_n\}$ , 满足

$$\begin{aligned} \not{D} \varphi_n(\tau) &= \lambda_n \varphi_n(\tau) \\ \not{D}^\dagger \varphi'_n(\tau) &= \lambda_n^* \varphi'_n(\tau) \\ \int d\tau \varphi_n'^\dagger(\tau) \varphi_m(\tau) &= \delta_{n,m}. \end{aligned} \quad (2-40)$$

作用量(2-37) 遵循手征对称性, 因为狄拉克算子在格点离散版无穷小手征变换下是不变的

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{i\alpha\gamma_5}. \quad (2-41)$$

路径积分测度变化为

$$d\mu \rightarrow d\mu \exp(-2i\alpha \int d\tau \sum_n \varphi_n'^\dagger \gamma_5 \varphi_n), \quad (2-42)$$

额外出现的是预期的反常项。

我们可以将相应的外尔算子定义为  $\not{D}_{R,L} \equiv \not{D}(1 \pm \gamma_5)/2$ 。有了上面提到的所有定义, 我们现在要证明格点版本指标定理

$$\text{index}(\not{D}_R) = n_+ - n_- = \int d\tau \sum_n \varphi_n'^\dagger \gamma_5 \varphi_n = -\frac{1}{2\pi} \int_M F, \quad (2-43)$$

方程 (2-43) 中的第一个等号对所有椭圆算子都有效。由于广义外尔算子  $\not{D}_R$  是椭圆的，因此第一个等号在这种情况下仍然成立。第二个等号的证明类似于 (2-10)。

通过在等式 (2-40) 中应用归一化，我们有

$$\int d\tau \sum_n \phi_n'^{\dagger} \gamma_5 \phi_n = n_+ - n_- \quad (2-44)$$

第三个等号可以用类似于<sup>[187]</sup>的方式证明。由于  $\int d\tau \sum_n \phi_n'^{\dagger} \gamma_5 \phi_n$  不依赖于基的选择，我们选择使用  $D_1$  的双正交本征态，记为  $\{\phi_n'\}, \{\phi_n\}$ ，来计算求和。按照藤川 (Fujikawa) 的方法<sup>[187]</sup>，

$$\begin{aligned} \int d\tau \sum_n \phi_n'^{\dagger}(\tau) \gamma_5 \phi_n(\tau) &= \int d\tau \sum_j a \sum_n \phi_{n,j}'^{\dagger}(\tau) \gamma_5 \phi_{n,j}(\tau) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int d\tau \sum_j a \sum_n \phi_{n,j}'^{\dagger}(\tau) \gamma_5 \exp\left(-\frac{\not{D}^2}{M^2}\right) \phi_{n,j}(\tau), \end{aligned} \quad (2-45)$$

其中

$$\not{D}^2 = D_\mu D^\mu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu [D_\mu, D_\nu] = D_\mu D^\mu + \gamma^1 \gamma^2 [D_1, D_\tau]. \quad (2-46)$$

由于  $D_1$  的谱只是右移和左移手征费米子的能量乘以  $\pm i$ ，本征态  $\{\phi_n\}$  可以分为两个扇区， $\{\phi_k^R\}$  和  $\{\phi_k^L\}$ ，满足

$$\begin{aligned} D_1 \phi_k^R &= i E_k^R \phi_k^R \\ D_1 \phi_k^L &= -i E_k^L \phi_k^L, \end{aligned} \quad (2-47)$$

其中  $E_k^R$  和  $E_k^L$  分别由 (2-28) 和 (2-30) 给出。我们有

$$\begin{aligned} [D_1, D_\tau] \phi_{k,j}^R &= -(i \partial_\tau E_k^R) \phi_{k,j}^R = -i \partial_\tau A_1 e^{-i(k+A_1)a} \phi_{k,j}^R, \\ [D_1, D_\tau] \phi_{k,j}^L &= (i \partial_\tau E_k^L) \phi_{k,j}^L = -i \partial_\tau A_1 e^{i(k+A_1)a} \phi_{k,j}^L, \end{aligned} \quad (2-48)$$

其中  $j$  是格点的标签。在  $a$  很小的情况下，我们可以只保留独立于  $a$  的项，并且有

$$[D_1, D_\tau] = -i \partial_\tau A_1. \quad (2-49)$$

等式 (2-45) 通过引入本征态  $\tilde{\phi}_{n,j}(\tau)$ ，其中

$$\phi_{n,j}(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{L} \sum_q e^{iqja+i\omega\tau} \tilde{\phi}_{n,q}(\omega). \quad (2-50)$$

$\tilde{\phi}_{n,q}(\omega)$  满足以下完整性条件，

$$\sum_n \tilde{\phi}_{n,q'}^{\dagger}(\omega') \Gamma \tilde{\phi}_{n,q}(\omega) = \text{Tr}(\Gamma) 2\pi L \delta_{q,q'} \delta(\omega - \omega'), \quad (2-51)$$

对于任何  $2 \times 2$  的矩阵  $\Gamma$ 。我们有

$$\begin{aligned} & \int d\tau \sum_n \phi_n'^{\dagger}(\tau) \gamma_5 \phi_n(\tau) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int d\tau \sum_j a \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{L} \sum_q \text{Tr}(\gamma_5 e^{-iqja-i\omega\tau} \exp(-\frac{D_\mu D^\mu}{M^2} - \frac{\gamma^1 \gamma^2 [D_1, D_\tau]}{M^2}) e^{iqja+i\omega\tau}) \end{aligned} \quad (2-52)$$

因为  $e^{-i\omega\tau} D_\tau e^{i\omega\tau} = D_\tau + i\omega$ ,  $e^{-iqja} D_1 e^{iqja} = D_1 + iq$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \int d\tau \sum_n \phi_n'^{\dagger}(\tau) \gamma_5 \phi_n(\tau) = \int d\tau \sum_n \phi_n'^{\dagger}(\tau) \gamma_5 \phi_n(\tau) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int d\tau \sum_j a \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{M^2}} \frac{1}{L} \sum_q e^{-q^2/M^2} \text{Tr}(\gamma_5 \exp(-\frac{2iq_\mu D^\mu}{M^2} - \frac{D_\mu D^\mu}{M^2} + \frac{i\gamma^1 \gamma^2 \partial_\tau A_1}{M^2})) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} M^2 \int d\tau \int dx \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dq}{2\pi} e^{-q^2-\omega^2} \text{Tr}(\gamma_5 \exp(-\frac{2iq_\mu D^\mu}{M} - \frac{D_\mu D^\mu}{M^2} + \frac{i\gamma^1 \gamma^2 \partial_\tau A_1}{M^2})) \end{aligned} \quad (2-53)$$

从第二行到第三行，我们采用连续极限并重新缩放  $q \rightarrow Mq, \omega \rightarrow M\omega$ 。从狄拉克矩阵

$$\text{Tr}(\gamma_5) = 0 \quad \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^1 \gamma^2) = -2i, \quad (2-54)$$

我们有

$$\int d\tau \sum_n \phi_n'^{\dagger}(\tau) \gamma_5 \phi_n(\tau) = \int d\tau \int dx \frac{1}{4\pi} 2\partial_\tau A_1 = - \int d\tau dx \frac{1}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi} \int F \quad (2-55)$$

因此指标定理 (2-43) 在我们的非厄米格模型中是正确的。

正如在第2.2.1节中讨论的那样，格点指标定理 (2-43) 意味着我们的格点模型能够在连续介质理论中再现正确的手征反常。另一方面，由于对称格点模型没有手征反常，格点指标定理 (2-43) 对于对称差分算子应该是无效的。下面，我们将简要说明定向格点模型和对称格点模型的不同之处，以及定向格点模型的非厄米性有何帮助。

根据定义，只有  $\not{D}$  的零模式对  $\text{index}(\not{D}_R)$  有贡献。 $\not{D}$  的特征值  $\lambda$  满足

$$\lambda^2 = (\omega - iE_k^L)(\omega - iE_k^R), \quad (2-56)$$

其中  $E_k^L$  和  $E_k^R$  分别是格点左移费米子和右移费米子的能谱。对于对称格点模型，零模式对应于  $\omega = 0, E_k^L = E_k^R = 0$ 。对于左移费米子， $k = 0$  周围的状态（对应于连续极限中的左移费米子）和  $k = \pi/a$  周围的加倍费米子状态都对指数有贡献。这就是指标定理 (2-43) 在对称格情况下失败的原因。在定向格情况下，情况变得不

同，其中  $E_k^L$  和  $E_k^R$  由等式 (2-28) 和 (2-30) 分别给出。因此零模式对应于  $\text{Re}(E_k^L) = \text{Re}(E_k^R) = 0$ ,  $\omega = -\text{Im}(E_k^L) = -\text{Im}(E_k^R)$ 。同样对于左移费米子的定向格点模型， $\text{Re}(E_k^L) = 0$  对应于  $k = 0$  附近的左移费米子，其中  $\omega = -\text{Im}(E_k^L) = -k^2 a/2 \sim 0$ ,  $k = \frac{\pi}{a}$  附近的加倍费米子，其中  $\omega = -\frac{2}{a}$ 。然而，式(2-53)中的因子  $e^{-\omega^2}$  强烈抑制了加倍费米子的贡献，因此只有  $k \sim 0$  处的左移费米子是不可缺少的。因此，我们可以通过指标定理 (2-43) 来重现有效的手征反常。

## 2.5 引力反常

根据方程 (2-17)，一维手征费米子的手征中心荷是重力反常的一个指标。对于我们的格点模型，如果晶格常数  $a$  足够小，我们可以只考虑  $k = 0$  和  $k = \pi/a$  附近的态，其能谱由 (2-36) 给出。如果忽略能量的虚部，能谱与自由复费米子 CFT 相同，其中  $E_\pi^L$  对应于  $c = 1$  的全纯模， $E_0^L$  对应于  $\bar{c} = 1$  的反全纯模。正如我们之前讨论的那样，能量的虚部对应于费米子的寿命。因此，在连续极限  $a \rightarrow 0$  中，全纯模会迅速被消灭，只有反全纯模幸存下来。因此，它应该对应于  $c - \bar{c} = -1$  的手征 CFT，这表明我们的非厄米格点模型具有与连续一维左移手征费米子相同的重力反常。

为了更清晰地阐述这一点，我们计算了周期边界条件 (PBC) 和反周期边界条件 (APBC) 下基态能量  $\Delta E$  的差异。对于自由费米子 CFT，众所周知，在 PBC 和 APBC 之间的真空能量差是<sup>[192]</sup>

$$\Delta E_{\text{vac}} = \frac{\pi}{4L}(c + \bar{c}), \quad (2-57)$$

其中，在周期性边界条件 (PBC) 下， $k = \frac{2\pi n}{L}$ ；在反周期性边界条件 (APBC) 下， $k = \frac{2\pi(n+\frac{1}{2})}{L}$ ； $L = Na$ ， $N$  是格点数；求和符号中的下标 “occ” 表示我们只对所有占据态求和。通过 CFT 与方程(2-57) 的结果比较，我们可以提取  $c + \bar{c}$  的时间演化，结果如图2-3所示。

在我们的模型中，PBC 和 APBC 的时间依赖基态能量可以通过对所有占据单粒子态的实部能量和由 (2-35) 给出的衰减概率因子求和来计算：

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k, \text{occ}} \text{Re}(E_k^L) \langle \psi'_k(T) | \psi_k(T) \rangle = \sum_{k, \text{occ}} e^{2\text{Im}(E_k^L)T} \text{Re}(E_k^L) \\ &= - \sum_{k, \text{occ}} \frac{\sin ka}{a} e^{2 \frac{\cos ka - 1}{a} T}, \end{aligned} \quad (2-58)$$

其中  $k = \frac{2\pi n}{L}$  对于 PBC， $k = \frac{2\pi(n+\frac{1}{2})}{L}$  对于 APBC， $L = Na$ ， $N$  是站点数。求和中的下标 “occ” 表示我们只对所有被占领状态求和。通过与 CFT (2-57) 的结果比较，

我们可以提取  $c + \bar{c}$  的时间演化, 结果如图2-3所示。

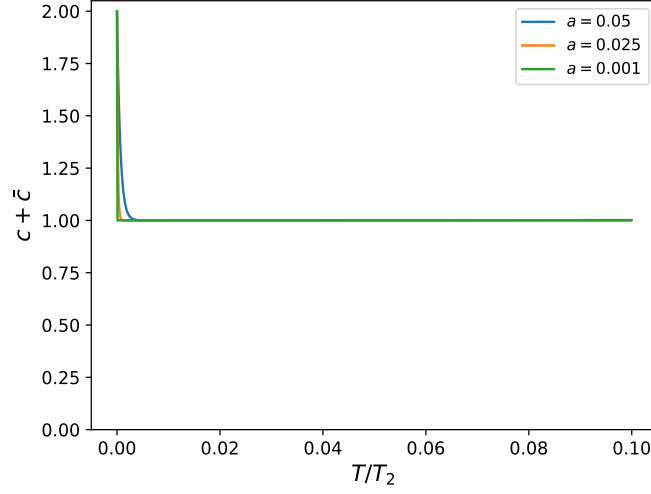


图 2-3  $c + \bar{c}$  在区间  $(0, \frac{1}{10}T_2)$  中的时间演化图示。 $T_2$  为特征时间尺度 (详见正文),  $L = 20$ ,  $l_0 = 1$ .

简单总结一下, 在连续极限  $a \rightarrow 0$  中, 格点模型从非手征系统开始, 然后迅速演化为只有左移费米子的手征系统。手征费米子状态可以持续很长一段时间。

在2.4.1节中提到了两个重要的时间尺度。首先, 在  $T \gtrsim T_1 = a$  时,  $ka = \pi$  附近的加倍费米子被抑制, 只有左移费米子存活下来。注意,  $T_1$  在连续极限中趋近于 0。而在  $T \approx T_2 = \frac{l_0^2}{a}$  时,  $ka = 0$  附近的左移费米子开始衰减, 这是我们希望避免的情况。幸运的是,  $T_2$  在连续极限中趋近于无穷大。因此, 在有限的  $a$  下, 我们只应考虑  $T_1 \ll T \ll T_2$  的时间区间。在这个区间内, 格点模型具有与  $c = 0, \bar{c} = 1$  的复手征费米子场论相同的性质。实际上, 我们的数值结果  $c + \bar{c} = 1$ , 如图2-3所示, 与场论相一致。

## 2.6 在局域扰动下的稳定性

格点化指标定理的拓扑性质表明, 我们的非厄米模型的零模式对局部扰动是稳定的。为了检查这一点, 我们考虑了低能有效哈密顿量, 并考虑这两种费米子之间的耦合

$$H = \sum_k - (k + ik^2a/2)c_{0,k}^\dagger c_{0,k} + (k - 2i/a)c_{\pi,k}^\dagger c_{\pi,k} \\ + Vc_{0,k}^\dagger c_{\pi,k} + Vc_{\pi,k}^\dagger c_{0,k},$$

其中  $c_{0,k}$  和  $c_{\pi,k}$  分别对应于  $k = 0$  附近的左移费米子和  $k = \pi/a$  附近的加倍费米子。对于足够小的  $a$ ,  $ak \ll 1, aV \ll 1$ , 我们有

$$\epsilon_+ \approx -k - (V^2 + k^2)ai/2, \quad \epsilon_- \approx k - 2i/a.$$

因此, 微扰不会打开能隙。它只是改变了能量的虚部 (示例见图 2-4), 或费米子的倒数寿命。然而, 费米子寿命的定性行为是不变的, 即向左移动的费米子在连续谱极限内具有无限寿命, 而向右移动的费米子在连续谱极限内的寿命为零。

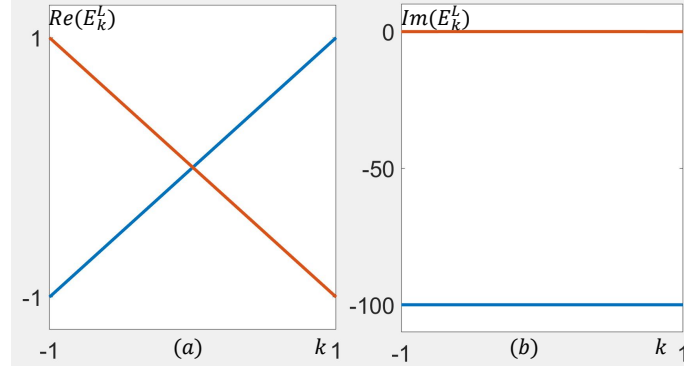


图 2-4 定向格点中手征费米子的低能有效哈密顿量的能带色散图。红线: 左移费米子; 蓝线: 加倍费米子。这里我们设  $a = 0.02$  和  $V = 1$ 。

我们还通过在哈密顿量(2-27)中添加  $\frac{i}{a} \sum_j \alpha_j c_j^\dagger c_j$  项来检查无序引起的效应, 其中  $\alpha_i$  是在  $[0, 0.1]$  范围内随机生成的。我们的数值结果表明, 这样的扰动也不会打开能隙。因此, 定向格点模型的零模比对称格点模型的零模更能够抵抗局部扰动。

## 2.7 讨论与总结

总之, 我们构建了一个具有复数谱的局域非厄米一维格点模型。我们证明了这个模型可以用多种方法描述一个左移手手征费米子, 并且表明它对于局部扰动是稳定的。

我们的结果表明, 在非厄米性的帮助下, 可以在同一时空维度中的非厄米格点模型中实现反常场论, 即在连续极限和低能区域中。在这个例子中, 连续极限意味着固定  $k$  和  $L = Na$ , 并让  $a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ ; 低能区域意味着  $|kL|$  是相同的或小于 1 的阶数。在我们的模型中, 对于翻倍的费米子来说, 低能区域应该是  $ka \rightarrow \pi$ , 然后我们可以通过用  $k + \pi/a$  替换  $k$  来将  $k$  重置为接近 0 的值。由(2-36)所示, 翻倍的费米子的能量有一个无限的虚部, 模式很快衰减。而左移的费米子的能量有一个可消失的虚部, 因此, 脱离环境的模式表示一个自由左移费米子。这就是低能有效自由费米子 CFT 的产生方式。

最后, 让我们讨论可能的实验实现问题。已知非厄米格点模型可以在光学晶

格中的超冷原子中实现。通过取方程(2-27)中的规范场  $A_1 = \pi/a$ ，该模型与文献<sup>[193]</sup>中的方程 F(4) 完全匹配，其中  $\kappa = -2J = 1/a$ ，这已经被提议在由两个平行的精细调谐的光学晶格组成的系统中实现。此外，该模型也可以用带有使左右不对称性和电感器的二极管的电路进行模拟，用于虚化学势的产生<sup>[194-195]</sup>。可以通过两点阻抗峰来检测零模。

## 第3章 非厄米费米子模型中的奇异纠缠

在非厄米物理学中，奇异点是一种异乎寻常的具有奇异性的物体，它们可能出现在能带中，而被称为谱奇异点 (SEPs)，从而带来非常奇特的效应。本章系统地研究了具有两种不同类型的谱奇异点 (SEPs) 的一般性非厄米模型的量子纠缠（纠缠熵和纠缠谱）。我们发现了非么正共形场论与  $k$ -线性型 SEP 之间的关系，这通常与  $\mathcal{PT}$ -对称性或伪厄米性自发破缺有关。文中还讨论了  $k$ -平方根型 SEP 与复共形场论 (cCFTs) 之间的潜在关联，它们类似于一级相变的临界性质。从纠缠谱中，发现零能奇异模与正常的零模是不同的。最后，我们简要讨论了类似的非厄米量子自旋模型。

### 3.1 简介

奇异点 (EPs)<sup>[196]</sup> 是非厄米量子系统参数空间中的奇点。在 EPs 处，某些特定的本征向量和它们对应的本征值会重合，导致异常的简并<sup>[197-198]</sup>。由于其丰富的物理和潜在的新应用，奇异点及其相关现象已成为非厄米量子物理学研究的核心课题<sup>[28,69-70,199-213]</sup>。特别是在动态环绕 EPs 时，其拓扑结构已被广泛讨论<sup>[204,214-223]</sup>，并在多种系统中得到了证明，包括光子学<sup>[224-229]</sup>，以及自旋、离子、超导量子模拟器<sup>[230-232]</sup>。其他引人注目的性质，如本征手性<sup>[233-234]</sup>，单向性<sup>[12,235-236]</sup>，以及在奇异点处增强的灵敏度<sup>[237-239]</sup>也吸引了大量关注。

EPs 通常在  $\mathcal{PT}$ -对称系统中被研究，因为在这些系统中，由于自发的  $\mathcal{PT}$ -对称性破缺，能隙会在 EP 处闭合并伴随着虚谱出现。然而，一般的 EP 将有完全不同的性质。虽然在各种少体系中成功地制造和探测了 EP 或其高维扩展结构<sup>[225,240-241]</sup>，如光子学系统<sup>[10,224,226-227,239,242]</sup>。但真正的多体系统中的 EP，如它们的能谱和本征态特性，以及在 EP 附近的相关观测量和纠缠性质的奇异行为，仍然是大部分未知的。在动量空间中，随着 EPs 的出现，能谱中的能隙消失，这些点被称为带中的谱奇异点 (SEPs)。与厄米无能隙系统不同，一般的非厄米哈密顿量具有复能谱，而 EPs 是复能量黎曼面上的分支点。

对于厄米系统，已经确定了在  $1 + 1$  维临界系统中，纠缠熵普遍按照  $S \sim (c/3) \log l$  的规律随尺度缩放，其中  $l$  表示子系统的尺寸， $c$  表示相关共形场论的中心荷<sup>[243-245]</sup>。在费米子系统中， $c$  与费米面上的节点密切相关，这些节点会引起态占据的不连续性<sup>[124]</sup>。

在某些没有 EPs 的无能隙非厄米系统中，就像在厄米系统中一样，正的中心荷与实谱费米点有关<sup>[246-247]</sup>。

然而，当非厄米无能隙系统加入 SEPs 时，上述陈述就不再有效。中心荷不再是正的，并且不再与费米点有一个朴素的联系。有几个知名的例子，包括  $1+1$  维的 Yang-Lee 边缘奇点<sup>[43-44]</sup>。尽管它们是非么正的，但它们仍然保持共形对称性，并表现出普适的对数尺度缩放的纠缠熵变化<sup>[49,248]</sup>。这样一个临界非厄米模型的低能理论被认为是一个非么正的共形场论。

最近，非么正的共形场论 (nUCFTs) 引起了特别的关注。它被证明 nUCFTs 不仅来自于经典统计模型的相变或非厄米量子模型的  $\mathcal{PT}$  相变，而且与非么正拓扑序列相关<sup>[249-254]</sup>。

非么正和么正共形场论 (CFT) 之间的一个主要区别是，在非么正 CFT 中，一些原生场的中心荷和共形权重是负的，而在么正 CFT 中，它们都是正的。由于共形权重为负，物理基态不再与共形真空重合。此外，有一种具有复中心荷的非么正共形场论称为复共形场论 (cCFTs)。它们可能出现在某些弱一阶相变中，例如在  $Q > 4$  Potts 模型和  $Z_n (n > 4)$  量子钟模型中发现的相变，以及在量子磁性系统中的类似高维拟相变的限制-解禁量子相变中。它们与自发对称性破缺或拓扑相变几乎没有相似之处。虽然它们的纠缠熵按对数尺度增长，但仍不清楚这种量子临界性是否保持共形对称性。它们缺乏明确定义的普适特征：中心荷会随系统尺寸变化而变。

本文利用量子纠缠的手段研究了一个具有奇异点的一般非厄米模型。可以使用第3.2节中描述的修改的 Peschel 关联矩阵方法估算该模型的纠缠谱和熵。我们在第3.3.1节中研究了一个具有可调非互易最近邻跳跃项和交替化学势的二能带非厄米哈密顿量。

在第3.3.2节中，保持广义斜 (反) $\mathcal{PT}$  对称性的拟厄米模型在对称破缺点周围具有线性色散。由于存在奇异点 (SEPs)，关联矩阵的特征值和纠缠熵都是异常的。负纠缠熵按对数尺度缩放，拟合得到  $c = -2$ ，除非拓扑边界态破坏共形 (平移) 对称性，导致纠缠熵的对数尺度缩放非普适。不同边界条件下，计算激发态的缩放维数进一步表明这是一个费米子鬼场 CFT。此外，当电子填充在 EPs 下方时，纠缠熵立即恢复到  $c = 1$  自由费米子态，这突显了 SEPs 在决定纠缠熵方面的重要性。

在第3.3.2节中，我们探讨了一种不同类型的奇异点，属于在第3.3.1节中所述的二阶奇异点中，并且一般出现在 (反)  $\mathcal{PT}$  破缺相中。在第3.3.3节中描述的具有非对称跳跃的模型也会产生具有  $k$ -平方根色散的奇异点。纠缠熵具有复的拟合中心荷的对数尺度缩放规律。然而，它在很大程度上取决于系统尺寸大小。我们认

为这意味着存在一个复的共形场论与其相联系。我们还提供了对这种非常规量子临界性的有效场论分析。

接下来，在第3.4节中，我们通过引入探测体态模计算纠缠谱，强调了零能量奇异模式和正常零模式之间的区别。这种方法还揭示了奇异束缚态的纠缠特征。

最后，在第3-14节中，我们还研究几个非厄米自旋链模型，简单的讨论它们跟费米子模型之间的关系。我们相信我们的研究将有助于更好地理解非厄米多体物理学，并为未来研究非么正共形场论和非常规量子临界行为铺平道路。

### 3.2 双正交纠缠熵

对于非厄米量子态的正确描述至关重要，因为传统量子力学在非厄米时不再适用。一个著名的例子是所谓的双正交量子力学，它需要两组非自正交基组来完全描述一个普适的哈密顿量（无论是厄米的还是非厄米的）。给定一个（非厄米）哈密顿量  $H$  和对应的本征值  $\varepsilon_\alpha$  和本征态  $|\psi_R\rangle_\alpha$ 。通常，这些特征向量不是正交的，即  ${}_\alpha\langle\psi_R|\psi_R\rangle_\beta \neq \delta_{\alpha\beta}$ 。然而，当前厄米共轭的特征向量  $(H^\dagger|\psi_L\rangle_\alpha = \varepsilon_\alpha^*|\psi_L\rangle_\alpha)$  考虑在内时。双正交状态满足  ${}_\alpha\langle\psi_L|\psi_R\rangle_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ 。显然，当哈密顿量为厄米的时， $|\psi_L\rangle_\alpha = |\psi_R\rangle_\alpha$ ，范数变回正常的正交关系  ${}_\alpha\langle\psi_R|\psi_R\rangle_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ 。

以  $|\psi_R\rangle_\alpha$  和  $|\psi_L\rangle_\alpha$  作为新基，原哈密顿量可以对角化为

$$H = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} |\psi_R\rangle_{\alpha} {}_{\alpha}\langle\psi_L|.$$

任何算子  $\mathcal{O}$  的期望值可以计算为

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \langle\Psi_L|\mathcal{O}|\Psi_R\rangle,$$

其中右态可以用右基展开为  $|\Psi_R\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_R\rangle_{\alpha}$  并且关联的左态是  $|\Psi_L\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_L\rangle_{\alpha}$ 。值得注意的是  $\langle\Psi_L|\mathcal{O}|\Psi_R\rangle = \langle\Psi_R|\mathcal{O}^{\dagger}|\Psi_L\rangle$  是真正的可观察量。

在量子场论的语言中，右特征向量  $|\psi_R\rangle$  可以通过在欧几里得空间从现在到无限过去的积分来构造，而左特征向量  $\langle\psi_L|$  是从现在到无限未来的积分<sup>[112]</sup>。在非么正场论中，可以采用复制黎曼面方法来计算其几何纠缠熵。在我们的研究中，哈密顿量是二次型。左右特征态可以看作是作用于真空（零态）的左右费米产生算符，即  $|\psi_L\rangle_{\alpha} = \psi_{L,\alpha}^{\dagger}|0\rangle$ ， $|\psi_R\rangle_{\alpha} = \psi_{R,\alpha}^{\dagger}|0\rangle$ 。值得注意的是，它们满足费米反对易关系，

$$\psi_{L,\alpha}, \psi_{R,\beta}^{\dagger} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3-1)$$

利用这些算符，我们可以进一步构造一个多体稳定“基态”，即按照能级  $\varepsilon_{\alpha}$  的实部进行填充的态。因此，我们有左基态  $|GS_L\rangle = \prod_{\alpha \in \text{filled}} \psi_{L,\alpha}^{\dagger}|0\rangle$  和右基态  $|GS_R\rangle =$

$\prod_{\alpha \in \text{filled}} \psi_{R,\alpha}^\dagger |0\rangle$ 。然后定义双正交密度矩阵（或称为右-左密度矩阵），

$$\rho_{RL} = |\psi_R\rangle\langle\psi_L|, \quad (3-2)$$

其自然地描述了非厄米系统的稳态特性<sup>[246,250,253]</sup>。注意到  $\rho_{RL}^\dagger \neq \rho_{RL}$ 。对于由  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  组成的纯态  $\rho_{\text{tot}} = |\psi_R\rangle\langle\psi_L|$ ，通过  $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}} |\psi_R\rangle\langle\psi_L|$  计算出约化密度矩阵。非厄米系统的（双正交）纠缠熵（BEE）定义为，

$$S(\mathcal{A}) = -\text{Tr}_{\mathcal{A}} \rho_{\mathcal{A}} \ln \rho_{\mathcal{A}}. \quad (3-3)$$

由于 Wick 定理在非厄米情况下仍然成立，我们可以使用 Peschel 的方法来计算通过两点关联函数的纠缠熵<sup>[140-142]</sup> 矩阵形式的关联函数定义为

$$C_{ij} = \langle GS_L | c_i^\dagger c_j | GS_R \rangle, \quad (3-4)$$

则纠缠哈密顿量  $\mathcal{H}_E$  通过以下方式与关联矩阵相关

$$\mathcal{C} = \frac{e^{-\mathcal{H}_E}}{1 + e^{-\mathcal{H}_E}}, \quad \epsilon_E^\xi = \ln \left[ \left( C_{\mathcal{A}}^\xi \right)^{-1} - 1 \right], \quad (3-5)$$

其中  $\epsilon_E^\xi$  是子系统  $\mathcal{A}$  的纠缠哈密顿量特征值， $C_{\mathcal{A}}^\xi$  是局限于  $\mathcal{A}$  区域的关联矩阵的特征值。双正交纠缠熵可以表示为

$$S(\mathcal{A}) = - \sum_{\xi} [C_{\mathcal{A}}^\xi \ln C_{\mathcal{A}}^\xi + (1 - C_{\mathcal{A}}^\xi) \ln(1 - C_{\mathcal{A}}^\xi)]. \quad (3-6)$$

### 3.3 非厄米模型和具有奇异点的量子纠缠

#### 3.3.1 一般模型

我们探索了一种具有非互易最近邻跳跃项和交错化学势的非厄米紧束缚模型。在实空间中，哈密顿量由下式给出

$$\begin{aligned} H = & w_1 \sum_{n=1}^L c_{n+1,A}^\dagger c_{n,B} + w_2 \sum_{n=1}^L c_{n,B}^\dagger c_{n+1,A} \\ & + v_2 \sum_{n=1}^L c_{n,B}^\dagger c_{n,A} + v_1 \sum_{n=1}^L c_{n,A}^\dagger c_{n,B} \\ & + u \sum_{n=1}^L c_{n,A}^\dagger c_{n,A} - u \sum_{n=1}^L c_{n,B}^\dagger c_{n,B} \end{aligned} \quad (3-7)$$

其中  $c_{n,A(B)}^\dagger$  和  $c_{n,A(B)}$  代表 A(B) 子晶格上第  $n$  个位点的产生湮灭算子， $u, v_{1,2}, w_{1,2} \in \mathbb{C}$  是可调参数。为简单起见，参数取要么是纯虚的，要么是实的值。只有当  $v_1^* = v_2, w_1^* = w_2$  和  $u \in \mathbb{R}$  时，哈密顿量变回厄米。如果我们采取开放边界条件，当

$v_1^* \neq v_2$  或  $w_1^* \neq w_2$  时出现著名的非厄米趋肤效应。通过施加周期性边界条件 (PBC), 即  $c_{L+1,A(B)} = c_{1,A(B)}$ , 动量空间中的哈密顿量可以通过傅里叶变换导出为

$$H = \sum_k \begin{pmatrix} c_{k,A}^\dagger & c_{k,B}^\dagger \end{pmatrix} h(k) \begin{pmatrix} c_{k,A} \\ c_{k,B} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

与单粒子哈密顿,

$$h(k) = \begin{pmatrix} u & w_1 e^{-ika} + v_1 \\ w_2 e^{ika} + v_2 & -u \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

其中我们将晶格常数取为 1。色散关系为

$$\varepsilon_k = \pm \sqrt{(a_r + b_r \cos k) + is \sin k}, \quad (3-10)$$

其中  $a_r = w_1 w_2 + v_1 v_2 + u^2$ ,  $b_r = w_2 v_1 + w_1 v_2$  和  $s = w_2 v_1 - w_1 v_2$ 。  $\varepsilon_k = 0$  定义奇异点。如果我们将所有跳跃参数设置为实数并且  $w_2 v_1 = w_1 v_2$ , EP 将位于  $k_{EP} = \pm \arccos(a_r/b_r)$ 。在这种情况下, EP 的存在需要  $|a_r/b_r| \leq 1$ 。为了使计算和讨论更容易, 我们将 EP 设置为  $k_{EP} = 0$  ( $k_{EP} = -\pi$ )。这需要  $a_r/b_r = -1$ , ( $a_r/b_r = 1$ ), 它独立于  $s$ 。费米子根据它们的实能量填充真空, 而虚能量是准粒子寿命的倒数。给定  $u^2, v_{1,2}, w_{1,2} \in \mathbb{R}$ , 我们得到以下实能量表达式:

$$\text{Re}[\varepsilon_k] = \left\{ a_r + b_r \cos k + [(a_r + b_r \cos k)^2 + s^2 \sin^2 k]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (3-11)$$

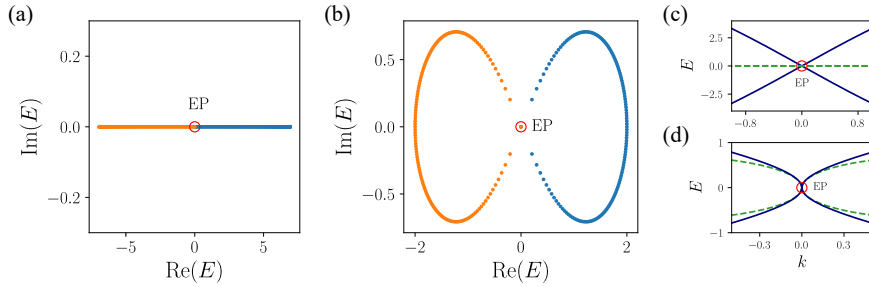


图 3-1 固定  $a_r/b_r = 1$  时 PBC 模型的能谱: (a)  $s = 0$  的情况; (b)  $s \neq 0$  ( $s = 2$ ) 的案例; (c) 图 (a) 在 EP 附近的色散, 实线表示实能量和虚能量的虚线; (d) 图 (b) 在 EP 附近的色散。

在 EP 附近, 实际能量标度为  $\text{Re}[\varepsilon_k] \sim \{a_r k^2 + [a_r^2 k^4 + s^2 k^2]^{1/2}\}^{1/2}$ , 它具有平方根色散  $\text{Re}[\varepsilon_k] \sim \sqrt{k}$  对于  $s \neq 0$ , 如图 3-1 所示, 其对于 2 倍 (二阶) 奇异点 (EP2s) 是典型的。特别的, 对于  $s = 0$  和  $a_r > 0$ , 它的色散为  $\text{Re}[\varepsilon_k] \sim k$ , 如图 3-1 所示。多体基态是通过填充所有实的负模式来构建的。然而, 当谱包含 EP 时, 这种填充是有缺陷的, 因为 EP 处的状态是非物理的。为了避免这种困境, 将无限小的动量偏移引入到能带中。然后能量最高的模, 即无限接近 EP 的模, 称为奇异

模。我们通过渐近行为展示奇异性质。随着  $k$  幂的变化，渐近行为发生变化。下一节将使用量子纠缠熵来检查渐近行为。

### 3.3.2 具有线性色散的奇异点

我们取  $-u^2, v_{1,2}, w_{1,2} > 0$  和

$$w_2/w_1 = v_2/v_1 = \lambda \quad (3-12)$$

即，首先考虑  $s = 0$ 。我们首先分析  $u = 0$  时模型的对称性，哈密顿量是伪厄米  $U_{psH}H(\lambda)U_{psH}^{-1} = H^\dagger(\lambda)$ ，与  $U_{psH} = \text{Diag}\{1/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\}$ ，和（斜） $\mathcal{PT}$ -对称  $U_{PT}H(\lambda)U_{PT}^{-1} = H^*(\lambda)$ ，其中斜  $\mathcal{PT}$ -对称性异常定义为

$$U_{PT} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}, U_{PT}^2 = 1 \quad (3-13)$$

它是非对称的，对于  $\lambda = 1$  变回  $\sigma_x$ 。哈密顿量具有厄米手征对称性  $U_{Ch}H(\lambda)U_{Ch}^{-1} = -H(\lambda)$ ，其中  $U_{Ch} = \sigma_z$ ，这导致特征能量以  $\pm$  对出现，并且具有时间反演对称性  $\mathcal{T}H(k)\mathcal{T}^{-1} = H(-k)$ ，其中  $\mathcal{T}$  是正常的时间反演运算符。尽管对于虚数  $v_{1,2}, w_{1,2}$ ，哈密顿量是反斜- $\mathcal{PT}$ -对称的  $U_{aPT}H(\lambda)U_{aPT}^{-1} = -H^*(\lambda)$ ，具有反斜- $\mathcal{PT}$ -对称性的异常定义为

$$U_{aPT} = i \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}, U_{aPT}^2 = -1 \quad (3-14)$$

当  $\lambda = 1$  时，它变为反么正  $i\sigma_x$ 。对于  $u \neq 0$ ，哈密顿量具有特征能量  $\varepsilon_{k,\pm} = \pm[\lambda(w^2 + v^2) + u^2 + 2\lambda wv \cos k]^{1/2}$ 。然而，它仍然是伪厄米的，因为所有特征值都出现在实数或复数共轭对中。此外，它保留了广义的  $\mathcal{PT}$ -对称性（对于虚数跳跃的反  $\mathcal{PT}$ -对称性也是如此）。手征对称性，类似于粒子空穴和时间反演对称性，成为非厄米（斜）手性对称性，

$$U_{nHCh}H^\dagger(\lambda)U_{nHCh}^{-1} = -H(\lambda), U_{nHCh} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

这仍然确保特征能量成对出现  $(\varepsilon_n, -\varepsilon_n)$ 。未归一化的左右特征向量是  $|\tilde{\psi}_R\rangle_{k,\pm} = (\frac{\varepsilon_{k,\pm}+u}{we^{ik+v}}, 1)^T$  和  $|\psi_L\rangle_{k,\pm} = (\frac{\varepsilon_{k,\pm}-u}{\lambda(we^{ik+v})}, 1)^T$ 。为了满足双正交条件，我们应该归一化左和左右特征向量。我们设  $|\psi_{R,L}\rangle_{k,\pm} = |\tilde{\psi}_{R,L}\rangle_{k,\pm}/\sqrt{\langle\psi_L|\psi_R\rangle_{k,\pm}}$  作为归一化的左右特征向量。EP 的存在需要  $\lambda(w-v)^2 \leq -u^2 \leq \lambda(w+v)^2$ ，此时范数  $\langle\tilde{\psi}_L|\tilde{\psi}_R\rangle_{k,\pm}$  消失，归一化的左右特征向量变得不明确。值得注意的是，当  $u = 0$  时，EP 退化到不存在代数奇点的能隙关闭点<sup>[255]</sup>（能带交叉点）。就纠缠熵而言，它的行为

类似于 PBC 中的单带自由费米子。

我们首先考虑具体情况  $u = \pm i\sqrt{\lambda}(w \pm v)$ , 其属于  $\mathcal{PT}$ -对称性 (反  $\mathcal{PT}$ -对称性) 模型破缺点。EP 位于  $k_{EP} = -\pi$ , 它附近的波函数是

$$\begin{aligned} |\psi_R\rangle_{k,\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\text{sgn}[iu(w-v)] \\ 1 \end{pmatrix} - \text{sgn}(iu) \begin{pmatrix} \frac{w\text{sgn}(v-w)}{v-w} \pm \frac{\sqrt{vw}}{v-w} \\ 0 \end{pmatrix} \delta\kappa + O(\delta\kappa^2) \\ |\psi_L\rangle_{k,\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\text{sgn}[iu(v-w)] \\ 1 \end{pmatrix} - \text{sgn}(iu) \begin{pmatrix} \frac{w\text{sgn}(v-w)}{w-v} \pm \frac{\sqrt{vw}}{v-w} \\ 0 \end{pmatrix} \delta\kappa + O(\delta\kappa^2) \end{aligned} \quad (3-16)$$

范数是  $\langle \tilde{\psi}_L | \tilde{\psi}_R \rangle_{k,\pm} = \pm \frac{2ivw}{\sqrt{(v-w)^2} \sqrt{vw}} \delta\kappa + O((\delta\kappa)^2)$ 。随着  $k$  接近奇异点, 即  $\delta\kappa \rightarrow 0$ , 值得注意的是, 这两个特征向量合并为一个  $(\pm i, 1)^T$ , 具有正的群速度。对于 (3-16) 中的第二项, 如果我们将  $w, v$  的符号从正转负, 纠缠特征保留。当  $u = -i\sqrt{\lambda}(w - v)$  和  $|v| > |w|$  对应于自发的 PT 对称性破缺时, 谱是全实的。在  $k_{EP} = -\pi$  处有一个固定的 EP, 但波函数是有缺陷的。在 EP 周围, 能量表示为  $\varepsilon_{k,\pm} = \pm 2\sqrt{\lambda w v} \sin(k/2) \propto \pm \sqrt{\lambda w v} k$ 。我们专注于  $2 \times 2$  块关联矩阵

$$\mathcal{C}_{\text{block}} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{AA} & \mathcal{C}^{AB} \\ \mathcal{C}^{BA} & \mathcal{C}^{BB} \end{pmatrix}, \quad (3-17)$$

其中  $\mathcal{C}^{AA}, \mathcal{C}^{AB}, \mathcal{C}^{BA}, \mathcal{C}^{BB}$  是形式为  $\langle c_{A(B)}^\dagger c_{A(B)} \rangle$  的关联函数,  $A(B)$  是子点阵标签。为了避免发散, 我们在 SEP 处引入了一个小的动量偏移  $\delta\kappa$ , 它相当于边界条件微小的扭曲 (微小的磁通量插入) 或微小的能隙 ( $\Delta = \sqrt{\lambda w v} \delta\kappa$ )。这样一来, 矩阵元素与  $\delta\kappa, \mathcal{C}^{AA}, \mathcal{C}^{AB}, \mathcal{C}^{BA}, \mathcal{C}^{BB}$  发散为  $1/\delta\kappa$ 。矩阵行列式的符号 (3-17) 在  $\delta\kappa \rightarrow 0$  的极限内, 表示为  $\text{sgn}[|\mathcal{C}_{\text{block}}^0|]$ 。它可以检测纠缠特征, 如 Tab.3-1 所示。为了计算纠缠熵, 我们将具有 PBC 的系统在实际空间中分成两部分。在  $u = -i\sqrt{\lambda}(w - v)$  和  $|v| > |w|$  的情况下, 关联矩阵的非平凡成对特征值为实, 但不落在普通范围  $[0, 1]$  内, 特征值对  $\mathcal{C}^\alpha = 1 - \mathcal{C}^\beta > 1$  如图 3-4 所示。

这些特征值会产生负纠缠熵。如图 3-2 所示, 纠缠熵呈对数尺度缩放, 但对数项前面有一个负系数

$$S(l) = \frac{c}{3} \ln \left( \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi l}{L} \right) + \text{const.}, \quad (3-18)$$

其中  $c$  是相应共形场论的中心荷 (CFT), 子系统的大小用  $l$  表示, 副项为常数。当  $\delta\kappa$  远低于单位动量  $\frac{2\pi}{L}$  时,  $c$  是常数。中心荷为负的事实表明 CFT 是非幺正的。该模型可以表示具有  $c = -2$ <sup>[256]</sup> 的  $bc$ -鬼场 (辛费米子) CFT。请注意, 从纠缠熵读出的是有效中心荷  $c_{\text{eff}}$ , 它与真正的 CFT 中心荷  $c$  关系为  $c_{\text{eff}} = c - 24\Delta_{\min}$ , 其中

$\Delta_{\min}$  是最低的共形权重。

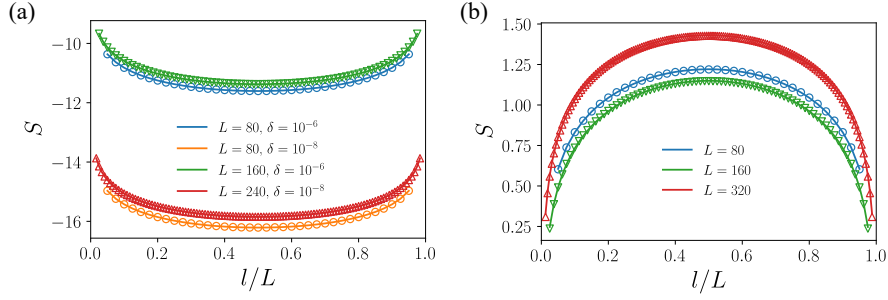


图 3-2 (a) 选择  $\lambda = 2, w = 2, v = 3, u = i$  的纠缠熵, 式(3-18) 的拟合揭示  $c = \{-2.005, -2.005, -2.003, -2.002\}$  用于蓝色、橙色、绿色和红色数据。(b) 在 APBC 中选择  $\lambda = 2, w = 2, v = 3, u = i$  的纠缠熵, 式(3-18)的拟合显示  $c = \{0.995, 1.064, 1.021\}$  用于蓝绿红数据。请注意, 在不同的  $L$  处,  $c$  与  $-2$  的小偏差是由于存在奇异束缚态。

为了进一步验证低能量场论中的辛费米结构, 我们尝试提取激发的标度维数据。对于么正共形场论, 共形真空即基态具有最小的共形权重  $L_0|GS\rangle = \Delta|GS\rangle$ , 其中  $\Delta = 0$ 。而对于所有激发态,  $\Delta > 0$ 。然而, 对于非么正共形场论, 物理真空的最小共形权重可能不会与  $\Delta = 0$  的共形真空重合。基态  $\Delta < 0$ 。对于带有零模的辛费米共形场论 ( $c = -2$ ), 即在周期性边界条件下, 最小的共形权重  $\Delta_{\min} = 0$ , 因此  $c_{\text{eff}} = c = -2$ 。物理基态遵循共形对称性。在反周期性边界条件下, 最小的共形权重为  $\Delta_{\min} = -1/8$ , 因此  $c_{\text{eff}} = c - 24\Delta_{\min} = 1$ 。为了验证这一点, 我们计算了在 APBC 下的纠缠熵, 其为  $S(l) = \frac{c_{\text{eff}}}{3} \ln\left(\frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi l}{L}\right) + \text{const.}$ , 其中  $c_{\text{eff}} = 1$ , 如图3-2所示。值得注意的是, 在 APBC 下的模型避免了奇异点, 并且表现出类似于一个自由的 (狄拉克) 费米子 ( $c = 1$  的 CFT)。

我们现在可以研究那些可通过加倍手征子态的缩放维计算的激发, 其中  $\Delta_{\alpha, \text{PBC}} = 2(E_{\alpha, \text{PBC}} - E_{0, \text{PBC}})/(E_T - E_{0, \text{PBC}})$ , 其中  $E_{\alpha, \text{PBC}}$ ,  $E_{0, \text{PBC}}$  分别表示 PBC 中的手征子态和基态能量,  $E_T$  表示动量-能量张量状态的能量。动量-能量张量状态相当于在零点能量之上添加两个最小激发, 其缩放维始终为  $\Delta_T = 2$ 。在 APBC 中,  $\Delta_{\alpha, \text{APBC}} = 2(E_{\alpha, \text{APBC}} - E_{0, \text{PBC}})/(E_T - E_{0, \text{PBC}})$ 。在 PBC 中, 准粒子动量为  $k_n = -\pi + \frac{2\pi}{L}n, n \leq L-1, n \in \mathbb{N}$ 。在 APBC 中, 准粒子动量为  $k_n = -\pi + \frac{2\pi}{L}(n + \frac{1}{2}), n \leq L-1, n \in \mathbb{N}$ 。因此, 该模型在 PBC 中的共形塔计算为:

$$\Delta_{n, \text{PBC}} = n, n \in \mathbb{N}, \quad (3-19)$$

在 APBC 中:

$$\Delta_{0, \text{APBC}} = -\frac{1}{8}, \Delta_{1, \text{APBC}} = \frac{3}{8}, \Delta_{n, \text{APBC}} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}n, n \geq 3, n \in \mathbb{N}. \quad (3-20)$$

此外,  $\eta\xi$ -ghost 理论也可以解释为辛费米子。 $\eta\xi$ -ghost 共形场论具有两个费米场  $\eta$  和  $\xi$ , 它们的共形维数分别为  $\Delta_\eta = 1$  和  $\Delta_\xi = 0$ 。 $\eta\xi$ -ghost CFT 的作用量为

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\eta \bar{\partial} \xi + \bar{\eta} \partial \bar{\xi}), \quad (3-21)$$

其模式展开为:  $\xi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n z^{-n}$ ,  $\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n z^{-n-1}$ , 且它们有费米反对易关系  $\xi_m, \eta_n = \delta_{m+n,0}$ 。其算符积展开为

$$\begin{aligned} \xi(z)\eta(w) &= \eta(z)\xi(w) = \frac{1}{z-w} + O(1), \\ \xi(z)\xi(w) &= \eta(z)\eta(w) = O(1). \end{aligned} \quad (3-22)$$

能量-动量张量为

$$T(z) = - : \eta(z) \partial \xi(z) : = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \quad (3-23)$$

哈密顿量为

$$H \propto L_0 = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} n : \eta_n \xi_n :, \quad (3-24)$$

它由两类不同的费米算符  $\eta_n, \xi_n$  组成。这类似于左右费米算符  $\psi_{L,\alpha}^\dagger$  和  $\psi_{R,\alpha}^\dagger$ 。

在谱奇点附近的哈密顿量的低能理论可以写为  $H = \sum_k k \psi_{R,k}^\dagger \psi_{L,k}$ , 其中费米速度设为 1。我们计算相应的关联函数:

$$\langle \psi_L^\dagger(x) \psi_R(0) \rangle = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi x}{x} \propto \frac{1}{x}, \quad (3-25)$$

以及其共轭

$$\langle \psi_R^\dagger(0) \psi_L(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi x}{x} \propto \frac{1}{x}. \quad (3-26)$$

此外, 注意到

$$\langle \psi_{L,R}^\dagger(x) \psi_{L,R}(0) \rangle \sim e^{ikx} C_{\text{div}}(\delta\kappa) \propto \frac{1}{x^0}, \quad (3-27)$$

其中  $C_{\text{div}}(\delta\kappa)$  是常数与  $\delta\kappa$  发散。因此, 我们得到了鬼费米算符的分别为 1 和 0 的缩放维数。

对于  $u = i\sqrt{\lambda}(w - v)$  和  $|w| > |v|$ , 这完全不同。虽然它对应于 PT 对称自发破缺点, 但它具有额外的拓扑边界模式。还有一个额外的一对非平凡特征值  $C^{\text{tr},\pm} = 0.5 \pm i\gamma$ , 其中虚部  $\gamma$  被发现不仅取决于子系统长度  $l$  还有力矩距离  $\delta\kappa$  和总系统大小  $L$ 。

这些特征值确保纠缠熵为正。  $S = \gamma \ln [\sin(\pi l/L)] + \text{常量}$ ,  $\gamma > 0$ 。然而, 如图 3-3 所示, 该系数不是普适的。该模型在 OBC 中的谱如图 3-4(b) 所示。当  $|w| > |v|$ ,  $u = \pm i\sqrt{\lambda}(w - v)$ ,  $wv > 0$  时, 产生一对虚能量  $\pm u$  的拓扑边模来自模型的拓扑结

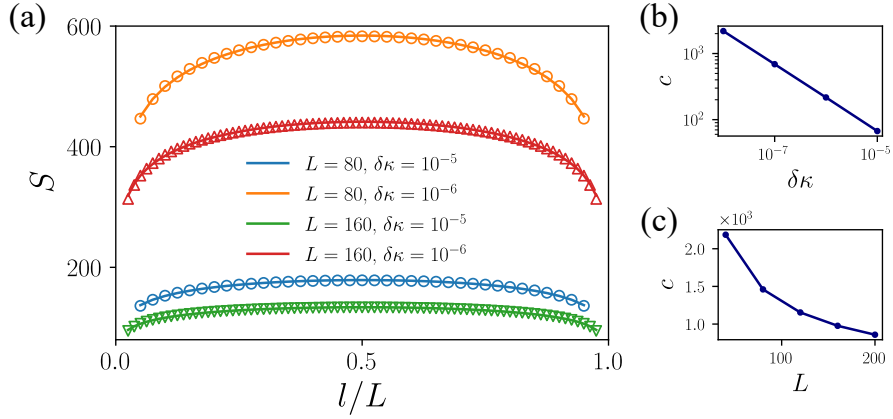


图 3-3 (a) PBC 中选择  $\lambda = 1, w = 3, v = 2, u = i$  的纠缠熵。式(3-18)的拟合显示  $c$  随着  $L$  和  $\delta\kappa$  的变化而变化，这是非普适的。(b) 和 (c)  $c$  对  $\delta\kappa$  和  $L$  的依赖。

构，该拓扑结构受 Eq.(3-15) 中定义的非厄米手性对称性保护。尽管它们是物理局域化状态<sup>[253]</sup>，但它们并未在纠缠谱边界呈现局域化。因此，它们对纠缠熵提供了额外的依赖于尺寸的贡献。无能隙拓扑系统和对称性增强的量子临界系统也存在类似现象，可参考文献<sup>[257-258]</sup>。在热力学极限下，这对额外的拓扑模式破坏了共形对称性（随着  $L$  接近无穷大，拟合中心荷变为 0）。此外，由于奇异模式依赖于  $\delta\kappa$ ，奇异模式和非厄米边界模式的混合导致有效中心荷对  $\delta\kappa$  的非普适依赖。在 Sec.3.4 中关于纠缠谱的研究中有详细说明。如果我们认为  $w, v$  纯虚的，如表所示。

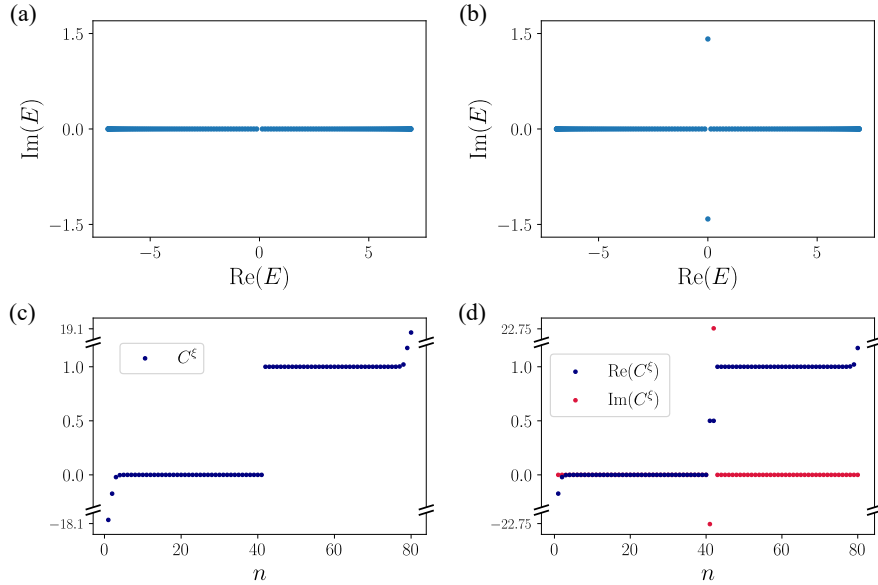


图 3-4 非普适情况与非普适情况的区别  $c = -2$  案例。(a) OBC 中  $c = -2$  情况的能谱无边模式。(b) 具有两个边界态的 OBC 中非普适情况的能谱。(c) 相关的特征谱 (a) 中的矩阵只有实数值。(d) (a) 中具有一对复值的关联矩阵的特征谱。

对称性破缺点包含能谱奇点。色散为  $\varepsilon_{k,\pm} = \pm 2\sqrt{\lambda w v} \sin(k/2) \propto \pm \sqrt{\lambda w v} k$  实的能谱需要  $wv > 0$ ，即  $\text{Im}[w]\text{Im}[v] < 0$ 。表3-1显示了详细的结果。

参数	$u$	$wv$	能谱	$w, v$ 大小	纠缠	$\mathcal{C}$ 指标	边界
$w, v$ 实 $u$ 虚	$u = \pm i\sqrt{\lambda}(w - v)$ $k_{EP} = -\pi$	$wv > 0$	实谱	$ w  <  v $	$c = -2$	+1	无
				$ w  >  v $	非普适	-1	$\pm u$
		$wv < 0$	虚谱	全部情况	$c = -2$	+1	无 <sup>①</sup>
	$u = \pm i\sqrt{\lambda}(w + v)$ $k_{EP} = 0$	$wv > 0$	虚谱	全部情况	$c = -2$	+1	无
		$wv < 0$	实谱	$ w  <  v $	$c = -2$	+1	无
				$ w  >  v $	非普适	-1	$\pm u$
$w, v$ 虚 $u$ 实	$u = \pm i\sqrt{\lambda}(w - v)$ $k_{EP} = -\pi$	$wv > 0$	实谱	all	$c = -2$	+1	无
		$wv < 0$	虚谱	$ w  <  v $	$c = -2$	+1	无
				$ w  >  v $	非普适	-1	$\pm u$
	$u = \pm i\sqrt{\lambda}(w + v)$ $k_{EP} = 0$	$wv > 0$	虚谱	$ w  <  v $	$c = -2$	+1	无
				$ w  >  v $	非普适	-1	$\pm u$
		$wv < 0$	实谱	全部情况	$c = -2$	+1	无

 表 3-1 不同的  $w, v, u$  参数选择及其对应的纠缠性质。

当  $|u| > \sqrt{\lambda}|w - v|$  时，能谱既不是完全实数也不是完全虚数。当  $k < k_{e-} = -\arccos\{[\lambda(w^2 + v^2) + u^2]/2\lambda wv\}$  或  $k > k_{e+} = \arccos\{[\lambda(w^2 + v^2) + u^2]/2\lambda wv\}$ ，能谱是全虚的，对应于 PT-破缺相。对于  $k_{EP-} < k < k_{EP+}$  和  $\varepsilon_{k,\pm} \propto \pm i\sqrt{k}$  否则。由于离散模式不一定位于 EP 上，如果我们继续通过用实际能量  $i$  半填充最低状态来构建基态。即，通过包含一些纯虚数状态，关联矩阵将产生复数特征值，从而在不表现出对数标度行为的情况下产生复数纠缠熵。当模式不位于 EP 时，模式周围的色散为  $\varepsilon_{k,\pm} \propto \pm k$ 。如果我们只包括狄拉克海中具有实负能量的模式，纠缠熵将类似于自由（狄拉克）费米子 CFT。当将虚模添加到基态时，关联矩阵会产生复数特征值，并且纠缠熵变得复数。由于基态和自由（狄拉克）费米子真空之间的类比，任何具有虚能量的模式都会破坏真空的共形对称性。当 SEPs 恰好被填充时，共形对称性被打破。由于在基态中包含一个 EP 附近的模式，因此纠缠熵是复的并且呈对数尺度缩放，这类似于下一节中讨论的情况。值得注意的是，如果我们填充远离 EP 的基态，则纠缠熵给出自由狄拉克费米子 CFT 行为。

### 3.3.3 具有平方根色散的奇异点

当  $w_2v_1 \neq w_1v_2$ ，即  $s \neq 0$ ， $v_{1,2}, w_{1,2} \in \mathbb{R}$ ，哈密顿量不再是准厄米，导致复的能谱和 EP 周围的非线性色散。例如，如果我们取  $w_1w_2 + v_1v_2 + u^2 = w_2v_1 + w_1v_2 > 0$ ，EP 位于  $k_{EP} = -\pi$ ，在其周围色散是复数  $\varepsilon_k \approx \sqrt{i(w_1v_2 - w_2v_1)}\sqrt{k}$ 。波函数是

$$\begin{aligned}
 |\psi_R\rangle_{k,\pm} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-(v_1-w_1)(v_2-w_2)}}{v_2-w_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{i(w_1v_2-w_2v_1)}}{v_2-w_2} \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\delta\kappa} + O(\delta k) \\
 |\psi_L\rangle_{k,\pm} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-(v_1-w_1)(v_2-w_2)}}{v_1-w_1} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{-i(w_1v_2-w_2v_1)}}{v_1-w_1} \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\delta\kappa} + O(\delta k)
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

范数  $\langle \tilde{\psi}_L | \tilde{\psi}_R \rangle_{k,\pm} = \mp \frac{\sqrt{i(w_1v_2-w_2v_1)}}{\sqrt{-(v_1-w_1)(v_2-w_2)}} \sqrt{\delta\kappa} + O(\delta k)$  以  $\sqrt{\delta\kappa}$  的方式趋近于零。在这种情况下，填充的费米海将没有共形对称性。然而，随着动量偏移  $\delta\kappa$  或复能隙

$$\Delta = \sqrt{i(w_1v_2 - w_2v_1)} \sqrt{\delta\kappa}, \tag{3-29}$$

移动，费米点周围的色散近似线性  $\text{Re}[\epsilon_k], \text{Im}[\epsilon_k] \propto (1/2\sqrt{\delta\kappa})k$ ，保留近似共形对称性。关联矩阵  $\mathcal{C}^{AA} = \mathcal{C}^{BB} = 1/2$  与  $\delta\kappa$  无关，表明每个格点的占用概率均等，而  $\mathcal{C}^{AB}$  发散为  $1/\sqrt{\delta\kappa}$  并且  $\mathcal{C}^{BA}$  随着  $\sqrt{\delta\kappa}$  接近 0。由此， $|\mathcal{C}_{\text{block}}^0| = 0$  不再传达有关纠缠模式的信息，因为它始终等于零。关联矩阵的非平凡特征值也与  $\mathcal{C}^\alpha = 1 - \mathcal{C}^\beta$  成对出现，但它们都是复的并且依赖于  $L$  和  $\delta\kappa$ 。纠缠熵具有对数形式  $S = \gamma_c(\delta\kappa, L) \ln[\sin(\pi l/L)] + \text{const.}$ ， $\gamma_c(\delta\kappa, L) \in \mathbb{C}$ ，如图 3-5 所示。由于纠缠性质不依赖于化学势，我们可以取  $u = 0$ 。如果  $\lambda_1 = w_1/v_1$  和  $\lambda_2 = w_2/v_2$  保持不变，关联函数保持不变。为了进一步减少参数的数量，我们可以将 EP 设置为  $k_{\text{EP}} = -\pi$ ，这允许我们仅使用单个参数调整模型的非厄米性和纠缠性。

当  $u = 0$  时，如果  $w_1$  变化，而其他参数保持不变，则 SEP 将消失并出现实或虚能隙，其中  $w_1 = v_1$ ， $w_2 > v_2$ 。这类似于一个临界点，将系统分为具有不同拓扑结构的相（在  $k$  空间中围绕 2 个 EP 的涡度不同）<sup>[259]</sup>。然而，在这种参数选择下，临界点不涉及任何对称性破缺或传统的拓扑量子相变<sup>[260]</sup>。它可能类似于某种一级相变，这是  $\mathcal{PT}$ -破缺系统中常见的现象<sup>[261]</sup>，其中 SEP 通常标记着一级相变。

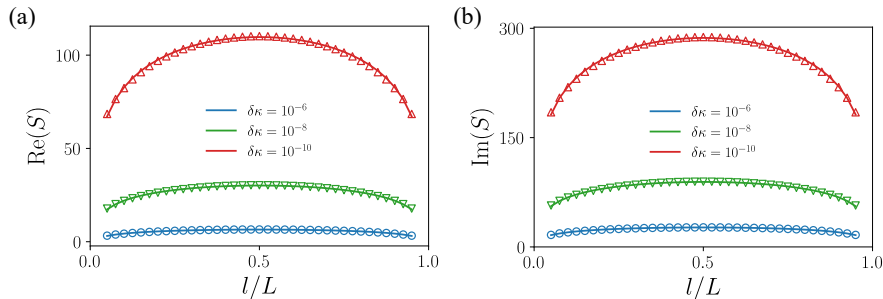


图 3-5 (a) PBC 中选择  $w_1 = 1, v_1 = 1, w_2 = 0.3, v_2 = 0.7$  的纠缠熵标度。Eq.3-18 的拟合揭示了  $c = 5.5 + 17.0i$  (蓝色)、 $c = 20.7 + 53.9i$  (绿色) 和  $c = 68.8 + 170.1i$  (红色) 总大小  $L = 80$ 。

该漂移的复对数标度缩放的纠缠熵类似于具有复中心荷的复共形场论 (cCFTs)，这些理论只具有近似的共形对称性，并被认为与一阶弱相变有关。先前的研究已在各种经典统计模型和强相关或失序场论中揭示了这种现象<sup>[262-265]</sup>。在自由费米子模型中，似乎无法实现这种现象。

然而，这种看似非相互作用的非厄米哈密顿量可以写成  $H_{\text{eff}}(k) = H_0(k) + \Sigma(\omega, k)$  的形式，其中  $H_0(k)$  是真正的非相互作用厄米部分， $\Sigma(\omega, k)$  是某些类型的相互作用或失序导致的自能，其虚部表示准粒子的寿命。这使得非厄米哈密顿量成为单粒子格林函数意义下的强相互作用或无序模型的有效模型<sup>[70,266]</sup>。

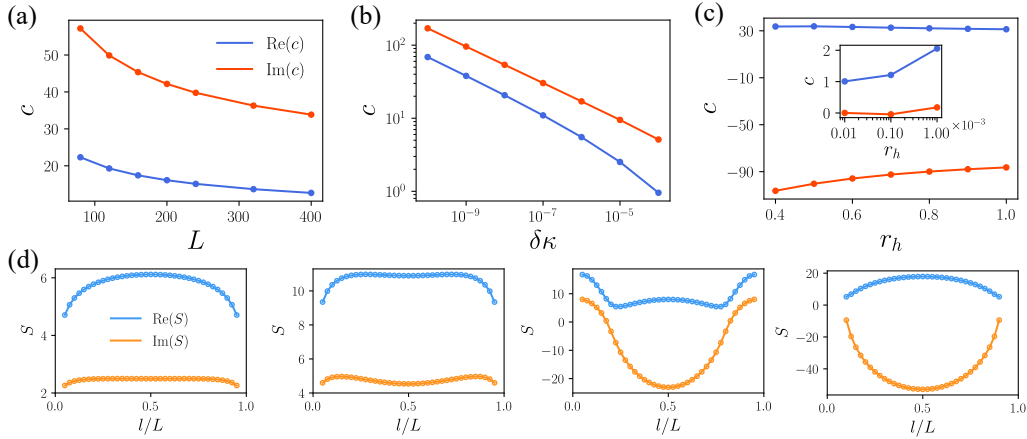


图 3-6 (a) 拟合中心荷与  $L$  的关系， $\delta\kappa = 10^{-8}$  且  $r_h = 10^6$ （即无穷远处不动点）。(b) 拟合中心荷与  $\delta\kappa$  的关系，其中  $L = 80$  且  $r_h = 10^6$ （即无穷远处不动点）。(c) 取  $L = 80$  和  $\delta\kappa = 10^{-8}$  时，在  $r_h = 0$  附近拟合中心荷与  $r_h$  的关系；内部面板：当  $r_h$  非常接近 0 时（从  $10^{-5}$  到  $10^{-3}$ ）， $c$  对比  $r_h$  的曲线。值得注意的是，计算结果显示，当  $r_h = 10^{-5}$  时， $c$  已经几乎等于 1，当然这个截断值取决于格点数和动量偏移大小。(d) 在  $L = 80$  和  $\delta\kappa = 10^{-8}$  下，纠缠熵从复数到 1（自由费米子）的过渡，从左到右分别对应  $r_h = 0.01, 0.1, 0.2, 0.4$ 。

为了研究漂移的复纠缠熵，我们提出以下场论模型：

$$H_{\text{NH}} \sim \int dx \{ i\bar{\Psi}(x)\gamma^x\partial_x\Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)i\gamma^5\Psi(x) - ir_h[1 + (-1)^x][\psi^\dagger(x)\psi(x) - \psi^\dagger(x)\partial_x\psi(x)] \}, \quad (3-30)$$

其中  $\bar{\Psi}(x)$  和  $\Psi(x)$  表示具有质量  $m$  的狄拉克费米子，而最后一项是非厄米的，由手性费米子  $\psi^\dagger(x)$  和  $\psi(x)$  组成。手性费米子的非厄米晶格实现可以在参考文献<sup>[267]</sup>中找到。其离散形式等效于通过设置  $w_2 = w_1 = 1$ ， $v_1 = 1 + m$  和  $v_2 = 1 + m - r_h$  来得到的非厄米晶格模型。因此，基于能谱特性，可以得到如图3-7所示的相图。

该模型中的第一项表示质量为零的狄拉克费米子场，第二项表示具有晶格极化的质量项，这是引入系统能隙的主要相关项。最后一项是手征扰动项，明确破坏了  $\mathcal{PT}$ -对称性（ $\mathcal{P}$  或  $\mathcal{T}$ ）。人们认为手征扰动项会将系统驱向一个非临界的无能

隙相，这已经在几个模型<sup>[268-271]</sup>中被证明。然而，使用场论方法直接处理非厄米情况下的手征扰动项是具有挑战性的。相反，我们可以通过执行对符合 CFT 中的  $c$  定理的拓扑阶段转变数的数值计算来估计耦合系数  $r_h$  的重整化群 (RG) 流。在紫外范围内，即系统很小的范围内，中心荷严重依赖于系统尺寸  $L$ 。

为了捕捉主要物理过程，我们把注意力主要放在  $r_h$  正轴和稳定不动点上。我们首先关注  $m = 0$  的奇异线。如图3-6所示，在  $r_h = 0$  附近，量子纠缠熵表现出从复中心荷缩放到  $c = 1$  缩放的过渡行为。在  $r_h = 2$  处，这对应某个“三重临界点”。如图3-7所示，量子纠缠熵表现出四分化的现象。可以通过分析波函数来证明这一现象。具体而言，在开边界条件下，当  $r_h = 2$  时，该模型无法通过相似变换转化为厄米链<sup>[63-64]</sup>。但是，需要注意的是，当  $L/2 + 1$  是奇数时，波函数形式为  $\sim \beta_{(1,2)}^n$ ，其中  $\beta_{(1,2)} = i$ ；当  $L/2 + 1$  是偶数时，波函数形式为  $\sim \beta_{(1,2)} = 1, -1$ 。因此，当我们将计算纠缠熵时，自然会出现波函数形式的为 4 的周期。

如图3-7(h) 所示，随着  $r_h$  的增加到较大值，中心荷的流动非常缓慢。根据共形场论 (CFT) 的  $c$  定理，它指出：

$$\frac{\partial}{\partial r_h} c(\lambda) = -\frac{dr_h}{d \ln L} \quad (3-31)$$

其中  $c(\lambda)$  是中心荷， $L$  是系统大小，在无穷强耦合  $r_h \rightarrow \infty$  处，存在一个不动点，即中心荷达到特定值  $c = c^*$ 。然而，即使在非常大的  $r_h$  处，中心荷对手动截断大小和系统尺度的依赖性仍然可以观察到。值得注意的是，动量偏移在理论中有双重作用。首先，它作为红外截断，类似于系统大小  $L$ 。其次，它被纳入理论中作为质量项，如公式(3-29)所示。正如图3-8所示，我们人为地操纵由  $\delta\kappa$  引起的能隙，使其纯实或纯虚，这使得得到的纠缠熵明显不同于图3-7，这突显了  $\delta\kappa$  在理论中扮演附加能隙角色的作用。

由于模型在理论上和数值上都存在红外发散的性质，因此只有让  $r_h$ 、 $L$  和  $\delta\kappa$  趋近于无穷大，且  $\Delta \sim \delta\kappa r_h \rightarrow 0$  时，我们才能渐近地探测到不动点的基本物理。然而，不动点物理与  $L$  和  $\delta\kappa$  之间的关系有关。图3-6表明， $c(L, \delta\kappa) = c(\infty, 0)$  依赖于取极限的顺序。对于  $L \gg 1/\delta\kappa \rightarrow \infty$ ， $c(\infty, \delta\kappa) \rightarrow 0$ ，相应地存在不可忽略的能隙，即符合对称性的破缺。对于  $L \ll 1/\delta\kappa \rightarrow \infty$ ， $c(L, 0) \rightarrow \infty$ ，即这种情况下保持了共形对称性。Rec 和 Imc 之间的关系取决于不动点的趋近方式，即  $m$ 、 $r_h$  和人为的  $\Delta$  的选择。当  $\Delta$  从实轴趋近于 0 时，Imc  $\rightarrow 0$ ，当  $\Delta$  从虚轴趋近于 0 时，Rec = Imc  $\rightarrow \infty$ 。图3-9表明  $c$ -不变曲线位于  $L\delta\kappa$ -不变曲线和  $L\delta\kappa$ -不变线之间，暗示了  $\delta\kappa$  的两种作用之间的相互作用，即作为尺度截断  $\sim 1/L$  和能隙  $\sim 1/\sqrt{L}$ 。并且，可以预测的是，当动量偏移跟系统尺寸以一种  $L^\zeta \delta\kappa$  ( $1 < \zeta < 2$ ) 规律保持不

变时，中心荷不会流动。

再回到中间不稳定的不动点，我们认为它会随着向红外点靠近时而无限接近于  $r_h = r^* = 1$  处<sup>①</sup>，在这个点，OBC 下相应的非布洛赫  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{T}$  都被打破，且非布洛赫能带理论不再适用。从图中显示的 1D 链的构型的角度来看，任何  $r_h$  扰动都将驱动系统流向不同的构型，这意味着不动点  $r^* = 1$  是排斥的。

我们还可以研究了另外两条奇异线  $m + 2 - r_h = 0$  和  $m - r_h = 0$ 。根据远处缓慢变化的中心荷流，我们声称这属于另外两个无穷强耦合的不动点  $r^*$  和  $r^*$ ，它们分别对应略微不同的链构型，自然它们的中心荷与  $r_h = \pm\infty$  会有细微的差别<sup>②</sup>。

### 3.3.4 奇异点与能隙关闭点并存

我们检查了跳跃参数  $v_{1,2}, w_{1,2} \in \mathbb{R}$  并且  $a_r = b_r > 0$  在前面的部分中，实能量和虚能量在 EP 周围有类似的色散，并且实带仅在 EP 处接触。然而，当两种独特类型的费米点共存时，如果参数被认为是完全虚的，即  $a_r = b_r < 0, s \neq 0$ ，就会出现一种不常见的情况。在 EP  $k_{EP} = -\pi$  附近，色散仍然是  $\epsilon_{k,\pm} \propto \pm\sqrt{k}$ ，在  $k_0 = 0$  处存在全虚模，而实能量  $\text{Re}[\epsilon_k] \propto |k|$  围绕着它。虽然整个能谱的能隙仅在 EP 处关闭，但实能谱能隙可能会在  $k_0 = 0$  时关闭。除了上面提到的复数对之外，我们还发现了关联矩阵  $0 < C^{\zeta+} = 1 - C^{\zeta-} < 1$  的其他非平凡实特征值对。它类似于非厄米手性金属的能带交叉点<sup>[247,278]</sup>。虽然总纠缠熵是复数，但从关联矩阵提取的额外非平凡实特征值对计算的纠缠熵为  $S = \gamma \ln [\sin(\pi l/L)] + \text{const.}$ ，其中  $\gamma \approx 0.34$ ，随着  $L$  和  $\delta\kappa$  的变化，它几乎保持不变。这无疑等同于自由费米子的纠缠熵。

## 3.4 纠缠谱和准粒子纠缠图像

现在我们从纠缠的角度考虑准粒子的性质。我们添加一个准粒子（来自  $\epsilon_{k,+}$  波段），其矩  $k$  在半填充地面上方状态到系统，同样二分链  $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$ 。新的多体右状态是  $|QPS_R\rangle = \psi_{R,k,+}^\dagger |GS_R\rangle$  左边的状态是  $|QPS_L\rangle = \psi_{L,k,+}^\dagger |GS_L\rangle$ ，或者以另一种形式  $|QPS_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{R,k,+}^{\mathcal{A}\dagger} + \psi_{R,k,+}^{\mathcal{B}\dagger})|GS_R\rangle$  和  $|QPS_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{L,k,+}^{\mathcal{A}\dagger} + \psi_{L,k,+}^{\mathcal{B}\dagger})|GS_L\rangle$ ，其中  $\psi_{R(L),k,+}^{\mathcal{A}(\mathcal{B})\dagger}$  是对的（左）费米子创造算子，它创造了一个准粒子 A(B) 区域中的动量  $k$ 。那么 A 的关联矩阵是

$$\begin{aligned} c_{ij}^Q &= \langle QPS_L | c_i^\dagger c_j | QPS_R \rangle_{i,j \in A} \\ &= \frac{1}{2} \left( c_{ij} + \langle GS_L | \psi_{L,k,+}^{\mathcal{A}} c_i^\dagger c_j \psi_{R,k,+}^{\mathcal{A}\dagger} | GS_R \rangle_{i,j \in A} \right) \end{aligned} \quad (3-32)$$

① 在负的  $r_h$  轴上也有一个相应的不稳定不动点  $r^{*'}$

② 鉴于与  $m = 0$  一定的相似性， $m + 2 - r_h = 0$  和  $m - r_h = 0$  上也可能存在中间不稳定不动点，但这并不是我们的关注点，故此忽略对其的讨论。

基态贡献包含在  $\mathcal{C}_{ij}^Q$  中的第一项，而准粒子贡献包含在第二项中。对于厄米有能隙相，关联矩阵产生 0,1 的特征值，除非存在贡献 1/2 特征值的能拓扑边界模式，这导致多体纠缠谱的退化为<sup>[279-280]</sup>，

$$\lambda_{\{s_n\}} = \prod_n \left[ \frac{1}{2} + s_n \left( C^n - \frac{1}{2} \right) \right], \quad s_n = \pm 1^{[281]}.$$

由于准粒子态的空间不确定性，它们充当了扩展的体态模式，并且在边界模式不存在时还在关联矩阵谱中贡献 1/2，导致多体纠缠谱的退化<sup>[282]</sup>。当存在边界模式时，它们将与准粒子态混合，从而打破纠缠谱中的简并性。在 PBC 中，计算纠缠熵时有两个切点对应于两个拓扑边界模式，这对应于关联矩阵中的两个能隙状态和纠缠谱中的四重简并。当准粒子被激发时，纠缠谱呈现出体零模式。两种边缘模式将通过与扩展体态混合，以类似于物理能谱的方式破坏简并

然而，在非厄米场景中，情况就大不相同了。对于 Sec. 3.3.2 中讨论的非普适情况，纠缠谱似乎并不反映物理边界模式。这是因为它们不一定具有恰好贡献 1/2 的零能量。然而，边界模式仍然会出现在  $\text{Re}[C^n]$  能谱中。对于具有奇异点的非厄米无能隙相，关联矩阵的特征谱中存在多个奇异模式，其中包含奇异模式的信息，如图 3-4 所示。他们高度依赖  $\delta\kappa$ 。此外，在 Sec. 3.3.2 中讨论的非普适情况下，奇异模式与非厄米拓扑模式混合，导致对  $\text{Im}[C^n]$  的  $\delta\kappa$  的显著依赖如图 3-4(d) 所示。当准粒子在远离 EPs 的地方被激发时，纠缠谱呈现出正常的体态零模式。值得注意的是，该模式对非厄米边界模式（如图 3-12 所示）或其他非厄米奇异模式（如图 3-11 和图 3-13）。这意味着正常零模式不会与奇异模式或拓扑边界模式混合。这表明，尽管具有零能量，但就纠缠谱而言，奇异模式与传统零模式不同。现在我们尝试探索除奇异模式之外的其他模式的纠缠谱。它是通过消灭（或创建相应的准孔）奇异模式来实现的。结果，纠缠谱发生了很大的变化。其余的奇异束缚态（非奇异态，除非采用热力学极限）支配着纠缠谱。虽然这些奇异束缚模式表现出奇异模式的一些特征，但它们也表现出正常零模式的某些规则金属特性。

奇异束缚模式导致在热力学极限中具有  $L$  的发散关联函数。对于  $k$  线性系统，关联矩阵与  $L$  发散为  $\log L$ ，并且那些奇异束缚态提供了纠缠熵的对数标度，如文<sup>[283]</sup> 中所示。如图 3-11 和图 3-12 所示，奇异束缚模式几乎继承了奇异模式的性质。虽然他们在纠缠谱中引入了一种新的中间能隙态，但它的行为与正常的零模式有很大不同。所有这些奇异纠缠模式几乎都不是与正常零模式的混合体。这是因为例外的束缚状态仍然不同。在  $k$  的平方根的情况下，具有奇异点  $\delta\kappa$  的发散相关子现在收敛到一个常量  $\sim \sqrt{1/L}$ ，这不会产生奇异束缚态。去除奇异点后，纠缠熵为正但非对数缩放。纠缠熵曲线类似于非现实 Lifshitz 临界的纠缠熵标度，但它

们的微观机制可能不同。如图 3-13 所示，非奇异束缚态不贡献反常模式，而是传导与正常体模式混合的体模式。

### 3.5 相关的非厄米自旋-1/2 链

在本节中，我们将简要探讨一些量子自旋模型的平行情境，并尝试建立与费米子模型的联系。首先考虑一个复横向磁场下的普适 1/2 自旋伊辛链：

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^{L-1} J \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - h \sum_{i=1}^L (\hat{\sigma}_i^z + \mathbb{I}) \quad (3-33)$$

其中  $J$  是耦合常数。奇偶算符定义为  $\mathcal{P} = -i\mathcal{R}^2 = e^{\frac{i\pi}{2}(S^z - \mathbb{I})} = \prod_{i=1}^N \sigma_i^z$ ，它改变了  $\sigma_i^x, \sigma_i^y$  的符号，其中旋转算符  $\mathcal{R}^z = e^{\frac{i\pi}{4} S_z^N} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{I} + i\sigma^z) i$  在  $xy$ -平面中逆时针旋转每个位置上的自旋  $\pi/2$ ，而  $S_z^N = \sum_{i=1}^N \sigma_i^z$  表示总自旋。时间反演算符  $\mathcal{T}$  是通常的复共轭，它改变了  $\sigma_i^y$  的符号和复参数的虚部的符号。

当  $h \in \mathbb{R}$  时，它是一个横向场伊辛模型 (TFIM)，可以通过 Jordan-Wigner 变换映射到一个费米模型上，其中周期性边界条件为  $\sigma_1^x = \sigma_{L+1}^x$ 。

$$H = J \sum_{i=1}^{L-1} (\hat{c}_i^\dagger c_{i+1} + c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + \text{H.c.}) - 2ih \sum_{i=1}^L (1 - c_i^\dagger c_i) + (-1)^{n_F} J (c_L^\dagger c_1 + c_L^\dagger c_1^\dagger + \text{H.c.}) \quad (3-34)$$

其中  $(-1)^{n_F} = (-1)^{\sum_{i=1}^L c_i^\dagger c_i}$  表示费米子数奇偶性算符，注意它是守恒量，我们可以将其设为偶数，对应费米链的反周期性边界条件 (APBC)。Bogoliubov-de-Gennes (BdG) 哈密顿量为

$$H = \sum_{k>0} \begin{pmatrix} c_k^\dagger & c_{-k} \end{pmatrix} h(k) \begin{pmatrix} c_k & c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}^T - hL\mathbb{I} \quad (3-35)$$

其中，

$$h(k) = \begin{pmatrix} \epsilon_k & 2iJ \sin k \\ -2iJ \sin k & -\epsilon_k \end{pmatrix} \quad (3-36)$$

其中  $\epsilon_k = ih + 2J \cos k$ 。能谱为

$$\epsilon_k = \pm 2J \sqrt{1 + (h/J)^2 + 2(h/J) \cos k}. \quad (3-37)$$

其临界点对应于  $c = 1/2$  的共形场论，也称为伊辛临界点，其中色散在能隙关闭点  $k_0 = -\pi$  附近线性。

当外部磁场是纯虚数时，哈密顿量保留  $\mathcal{R}^x\mathcal{T}$ -对称性但不保留  $\mathcal{PT}$ -对称性。Jordan-Wigner 变换仍然有效，它还保留奇偶对称性。费米子的奇偶性仍然可以被确定。此时的色散关系为

$$\varepsilon_k = \pm 2J^x \sqrt{1 - (|h|/J)^2 + 2i|h|/J \cos k}, \quad (3-38)$$

它与公式 (3-10) 具有某些相似性。要使能隙消失，即出现奇异点 (SEP)，必须满足  $|h| = J$ ，而 EPs 在  $k_{EP} = \pm\pi/2$  处。在 SEP 附近，色散关系呈  $k$  的平方根形式。如果我们取一个一般的复外部磁场， $h = h_{\text{re}} + ih_{\text{im}}$ ，其中  $h_{\text{re}}, h_{\text{im}} \in \mathbb{R}$ ，则 EP 的存在需要满足  $h_{\text{re}}^2 + h_{\text{im}}^2 = J^2$ ， $|h_{\text{re}}|, |h_{\text{im}}| < J$ ，而 EPs 在  $k_{EP} = \pm \arccos(-h_{\text{re}}/J)$  处。当  $h_{\text{re}} = J$  时，对应于 Ising 临界点。复横场的引入在哈密顿量层面就打破了  $\mathcal{PT}$ -对称性，而该奇异线分割了虚数能隙相（实谱无能隙，中心荷  $c = 1$ ，这可以通过纠缠熵得出），和一个有实能隙的相。

给定模型的基态“物理”上被构造为填充负能带（实部为负）的能级。然而，奇异点的存在可能导致发散，依旧可以通过在动量上引入截断来缓解这种情况。在 BdG 哈密顿量的情况下，可以使用与前面章节类似的方法计算基态的多体纠缠熵。然而，应该注意到熵应该减半，因为 BdG 哈密顿量人为地将自由度加倍。因此，真正的中心荷应该是相应费米子模型的一半。结果得到的纠缠熵具有复的中心荷和系统尺寸漂移的对数尺度缩放。

在 TFIM 上添加一个  $x$  方向的虚磁场，得到的哈密顿量为

$$H_{\text{YL}} = - \sum_{j=1}^N \left( h\sigma_j^z + J\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + i\kappa\sigma_j^x \right), \quad (3-39)$$

其中  $h, J, \kappa > 0$ 。这个著名的模型是 Yang-Lee 边缘奇点的格点化版本<sup>[284-285]</sup>，具有  $\mathcal{PT}$ -对称性。在  $\mathcal{PT}$ -对称性自发破缺点处出现了奇异点 (EPs)，将实谱和分叉的复谱分开，导致一个相变线。这条相变线连接着 Ising 临界点和单比特  $\mathcal{PT}$ -对称性自发破缺点，上面每个点都对应一个 EP。但与上述模型不同，在热力学极限下，转变线是稳定的，其有效场理论与某个非么正极小模 CFT  $\mathcal{M}_{5,2}$  相关联，其中心荷为  $c = -22/5$ 。这个模型在费米子表示中高度非局域。可以通过精确对角化方法研究系统的纠缠性质，这在 Gehlen 的研究中已经进行了讨论<sup>[284-285]</sup>。结果得到的纠缠熵导致一个正的有效中心荷  $c_{\text{eff}} = c - 24\Delta_{\text{min}} = 2/5$ ，其中  $\Delta_{\text{min}} = -1/5$ ，尽管是非么正的。一般而言，非么正极小模  $\mathcal{M}_{p,q}$  有一个有效中心荷  $c_{\text{eff}} = 1 - 6/pq$ ，其中  $p$  和  $q$  互质。由于  $p > q \geq 2$ ， $c_{\text{eff}} \geq 0$ 。因此，这些模型总是显示出非负的纠缠熵<sup>[248]</sup>。

为了深入了解虚数磁场的行为，考虑哈密顿量

$$H_s = \sigma^x + \exp i\phi \sigma^z, \phi \in [0, \pi/2], \quad (3-40)$$

其中  $\sigma^x$  代表一个指向  $x$  方向的自旋（某种程度上，选定的铁磁方向），扰动项  $\sigma^z$  试图翻转自旋。当  $\phi = 0$  时，系统处于中间的不动点，对应于  $xz$  平面中  $x$  轴对齐状态和  $z$  轴对齐状态（某种程度上，顺磁方向）之间的转换。当  $\phi = \pi/2$  时，哈密顿量位于一个奇异点，只存在一个本征态，对应于系统总是处于  $y$  轴对齐状态，不管能量如何。在伊辛临界点附近， $\phi = 0$  和对称的  $\phi = \pi$ （简并态）可以看作单个自旋的经典图像。而是异常简并的  $\phi = \pi/2$  态则是真正的(3-39)在取  $h = \kappa, J = 0$  时的自旋图像。当体系从 Ising 临界点附近（ $\phi = 0, \phi = \pi$ ）沿着  $\mathcal{PT}$ -对称性自发破缺线向  $\phi = \pi/2$  移动时，简并的态会立马融合成一个态，并且这个态是  $\mathcal{PT}$ -对称的。

另一方面，考虑

$$H_d = \sigma^x \sigma^x + \exp i\Phi (\sigma^z \mathbb{I} + \mathbb{I} \sigma^z)/2, \Phi \in [0, \pi/2]. \quad (3-41)$$

在  $xz$  平面中，同样的， $\Phi = 0, \pi$  点对应于伊辛临界点附近的简并基态的经典图像，而  $\Phi = \pi/2$  点对应于一种异常简并的  $z$  轴对齐状态，如公式(3-40)所示。在公式(3-41)中， $0 < \Phi < \pi/2$  的区间可以模拟(3-33)的奇异线。当  $\Phi$  沿着这条线跑动时，同样的，简并的态会和融合成一个。自旋指向逐渐被拉向与  $z$  轴对齐。这里不同的是， $\mathcal{PT}$ -对称性很显然的破缺了，因为在这里的  $\mathcal{PT}$ -算符实际上对应于  $z$  轴的翻转。

这里提到的另一个模型是受虚边界磁场影响的可积 XY 模型<sup>[286]</sup>,

$$H_g = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y] + \frac{ig}{2} (\sigma_1^z - \sigma_{N+1}^z), \quad (3-42)$$

它与我们在 Sec. 3.3.2 中研究的情况有些相似，但此处的  $\lambda = 1$ （见 Eq.(3-12)）。需要注意的是，这里的奇偶算符改变每个  $\sigma_j^x, \sigma_j^y$  的符号，并将  $\sigma_1^z$  映射到  $\sigma_{N+1}^z$ ，反之亦然。因此，哈密顿量也是  $\mathcal{PT}$ -不变的。由于边界项的存在，转化后的费米模型具有长程跳跃。临界点发生在  $g_c = 1$ ，其有效场论是具有  $c = -2$  的非么正 CFT。

因此，对于具有自发  $\mathcal{PT}$ -对称性破缺相关的奇异点的非厄米自旋链模型，这些系统的量子临界性通常由一个具有负中心荷的非么正共形场论描述。而那些明确破坏  $\mathcal{PT}$ -对称性的 EP，则从纠缠熵的复中心荷得到适合的复中心荷，揭示了近似共形对称性的可能性。这与非厄米二次费米模型的结果是相容的。

### 3.6 总结与讨论

本文研究了具有奇异点 (EPs) 的非厄米非相互作用费米模型的纠缠性质。非厄米系统的双正交基态是通过将实谱填充至半满并在动量空间留下最小截断生成的。我们发现，例外状态对纠缠测量有显著影响。

当在 SEPs 周围的色散是  $k$ -线性时，纠缠熵的尺度缩放行为表明系统的低能理论可以用一个具有中心荷  $c = -2$  的非么正共形场论 (CFT) 来表征。另一方面，当在 SEPs 周围的色散是  $k$ -平方根时，纠缠熵的复对数尺度缩放行为支持存在潜在的 cCFTs，尽管没有明显的对称性破缺或拓扑转变发生。当人为地去除 SEPs 时，所有这些奇怪现象都会消失，这表明 SEPs 对纠缠的重要性。此外，奇异模与纠缠谱的观测有所不同。非厄米自旋模型中也观察到类似的规律。

最后，值得注意的是这些发现在高维系统中的潜在影响。在二维系统中，存在具有 EPs 的非厄米 (半) 金属，可以通过向 Weyl 半金属添加非厄米扰动构造<sup>[28]</sup>。“费米面”可以是线状的 (奇异线) 或点状的 (Weyl 节点变形为两个 EP)，预计对纠缠熵的贡献分别为  $\alpha O(L \ln L)$  和  $\beta O(L) + \gamma O(\ln L)$ ，其中  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $\gamma$  是大小和截断相关的复系数，根据单个一维 EP 的贡献。在三维中，将出现“费米-塞费尔特”面，在打结的非厄米金属中，包含具有不同拓扑的二维奇异物体<sup>[28,210-211,287]</sup>。这些物体的纠缠特性尚未得到研究，因此在这个领域的进一步研究是必要的。

我们预测具有 SEPs 的非厄米系统可能表现出与其厄米对应物不同的量子临界性和普适性。鉴于相关物理量的可检测性<sup>[199,260,288]</sup>，对这些现象的实验观察值得进一步探究。

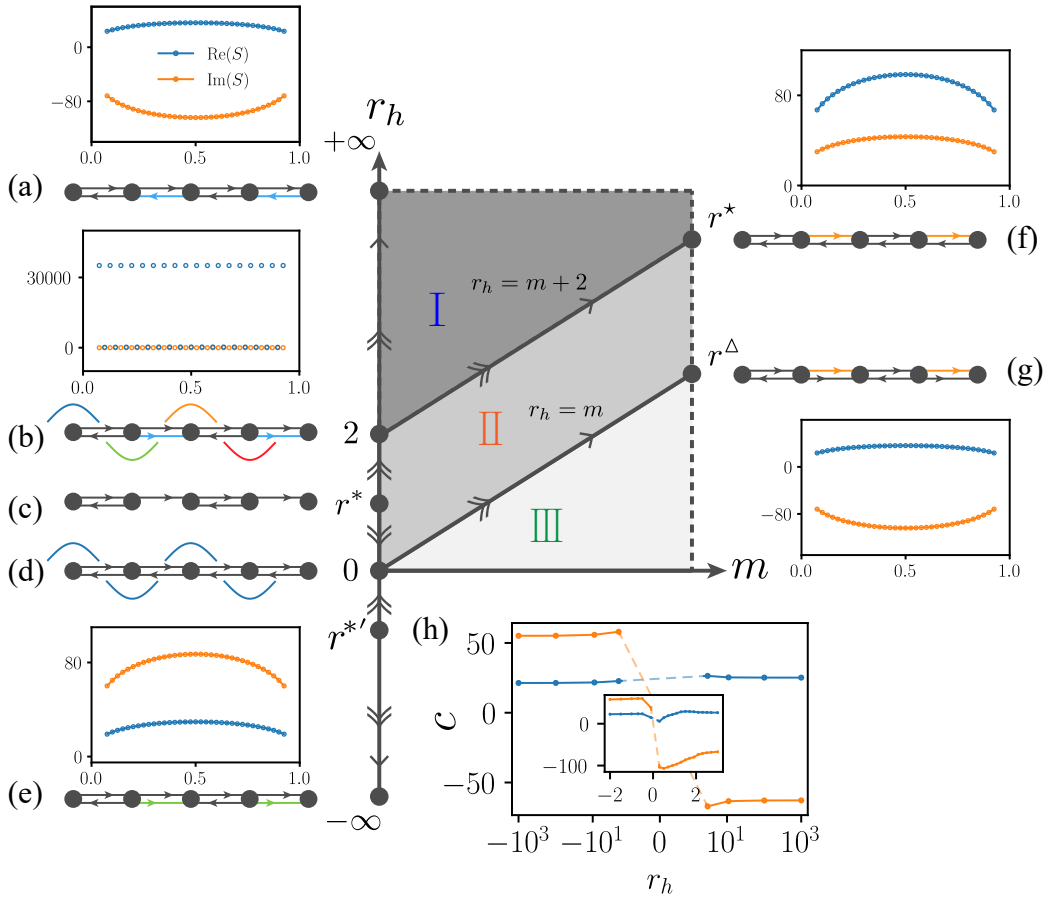


图 3-7 如图所示，模型(3-30)的“相图”，相 I 为实能隙相，相 II 和相 III 为虚能隙项，但能隙打开的位置不同。 $m = 0, m = r_h, m + 2 = r_h$  为三个奇异线（其上每一个点都为奇异点），线上的流用箭头标出，其中双箭头表示很强的流，而单箭头表示弱流。可能的不动点已经用粗的黑点标出，该不动点对应的链的构型以及相应的纠缠熵（计算都是取  $L = 80$  和  $\delta\kappa = 10^{-8}$ ）已在旁边标出。其中 (a) 为  $r_h = +\infty$  处链的构型，淡蓝色跳跃键表示该键远大于其他黑色键，相应的纠缠熵在其上方（计算取  $r_h = 10^5$ ）(b)  $r_h = 2$  处链的构型，蓝色反向箭头表示该处跳跃系数是负的，且振幅相同。四种不同颜色的波浪线表示波函数实际上是包含一个  $i^n$  的因子。相应的纠缠熵结果在其上方。 $r_h = 2$  这一点的纠缠熵实际上是发散的，我们只能无限接近于它（我们取了  $r_h = 2 - 10^{-16}$  来计算），可以看到明显的 4-周期规律。(c) 某个中间不动点  $r^*$  的构型，该处中心荷取极大值。(d) 与 (b) 成对照的自由费米子的构型荷波函数，当然其也是模型的特殊唯一厄米不动点。(e)  $r_h = -\infty$  处链的构型，淡绿色跳跃键表示该键远大于其他黑色键但该系数是负数，因此用了相反的箭头，以及相应的纠缠熵在其上方（计算取  $r_h = -10^5$ ）(f)(g) 另外两个无穷远处的不动点  $r^*$  和  $r^\Delta$  的链构型，它们分别位于  $m + 2 = r_h$  和  $m = r_h$  的无穷远处。它们的差别在于，跟无穷大的跳跃键互易的（下方）的键符号不一样，相反方向的为负。以及它们的纠缠熵（分别在上方和下方）。可以看到， $r^*$  处及其它无穷远处不动点的 1D 链的构型与 1D 中的退禁闭量子相变点 (DQCP) 具有某种相似性<sup>[268-269,272-277]</sup>，我们认为它仍然具有近似的共形对称性。(h) 中心荷在  $r_h$  轴上的流动，实际上，计算结果显示，当  $|r_h| > 10^3$  时，中心荷的变化已经不超过  $10^{-8}$ 。中心面板： $-2 < r_h < 2$  时  $c$  的流动，0 附近的行为可见图 3-6(c)，其中在  $r_h = 1.2$  和  $r_h = -0.6$  附近， $|c|$  取极大值，这对应于某个排斥性的不动点。当然，计算得到的点跟  $L$  和  $\delta\kappa$  的选取有关。

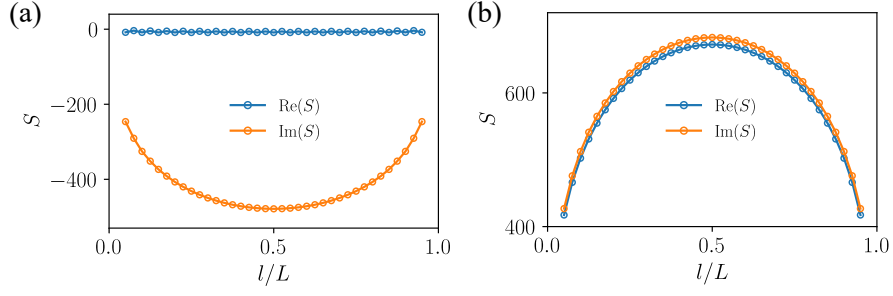


图 3-8 当人为的将微小能隙变成 (a) 纯虚 (b) 纯实的时, 纠缠熵在  $r_h \rightarrow \infty$  的尺度标度缩放规律图像。其中能隙的大小约为  $10^{-4}$ , 格点数为 80 且动量偏移  $\delta\kappa$  固定为  $10^{-8}$ 。

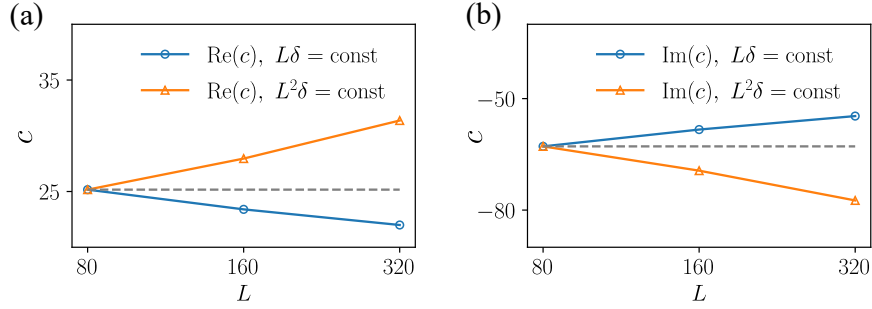


图 3-9 在  $r_h \rightarrow \infty$  不动点处, 保持  $L\delta\kappa$ -不变和  $L^2\delta\kappa$ -不变的中心荷 (a) 实部 (b) 虚部随系统大小漂移的曲线。其中虚线表示中心荷不随尺寸大小漂移的直线, 应该对应于  $L^\zeta\delta\kappa$ -不变, 其中  $1 < \zeta < 2$ 。

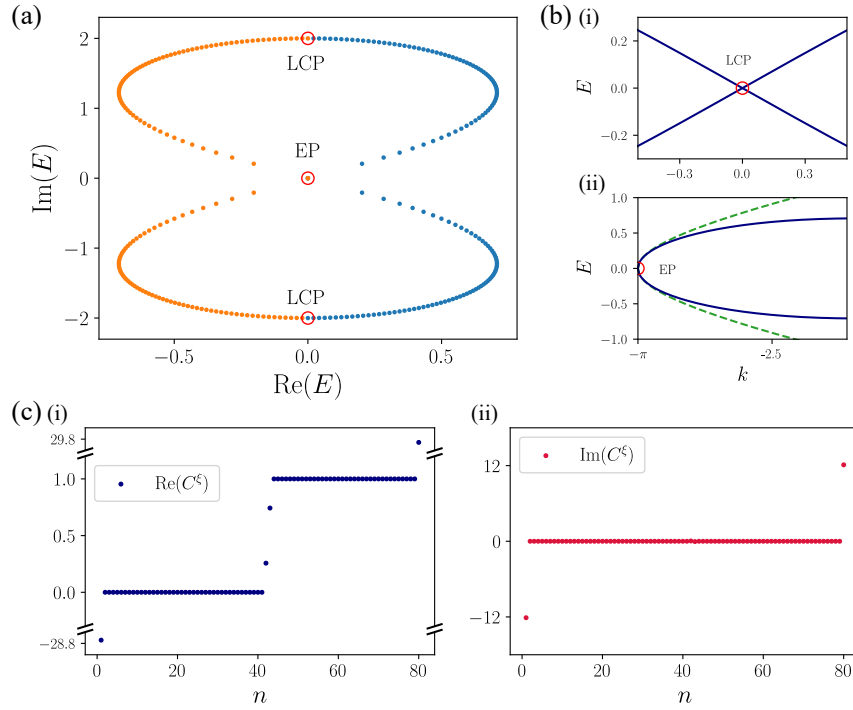


图 3-10 (a) EP 的能谱与实能谱的能带交叉点 (LCP) 共存, (b) (i) LCP 附近的实能谱和 (ii) EP 附近的能谱, 实线代表实部, 虚线代表虚部, (c) (i) 特征谱的实部 (a) 中的关联矩阵与导电状态和外部奇异模式和 (ii) 关联矩阵的特征谱的实部 (a) 具有外部奇异模式。

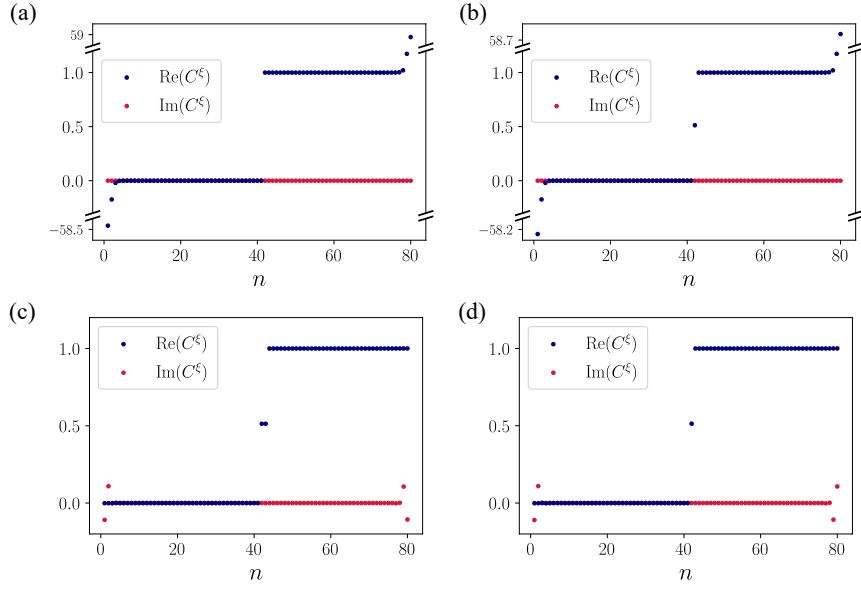


图 3-11 PBC 中  $c = -2$  个案例关联矩阵的特征谱 (a) 具有奇异模式；(b) 具有奇异模式和类似于正常零模式的正常准粒子 (QP)；(c) 没有 EP 但有 QP，奇异束缚态与正常零模式几乎没有杂交；(d) 没有 EP，它的行为几乎是具有零模式和奇异束缚模式的普通金属。

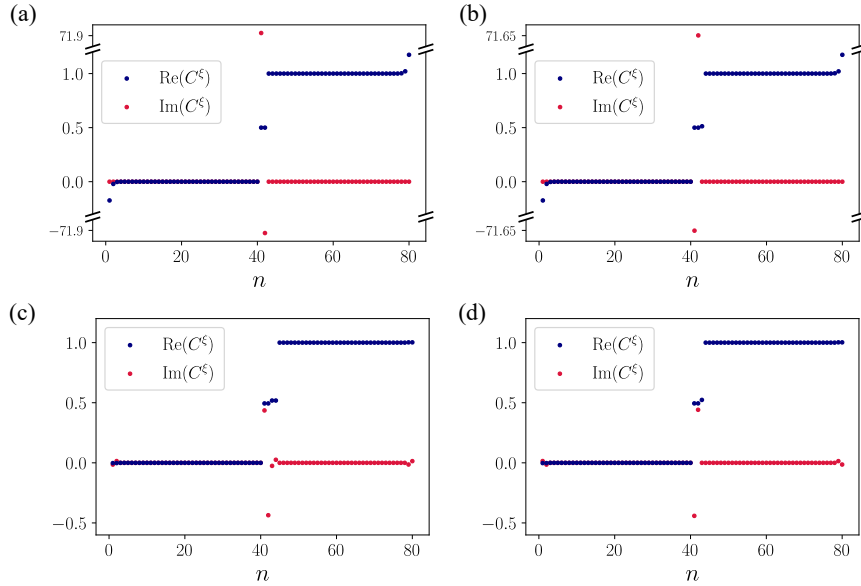


图 3-12 Sec. 3.3.3 (a) 中非普适情况的关联矩阵的特征谱具有奇异模，从实部看它类似于拓扑相；(b) 对于奇异模式和正常准粒子 (QP)，有三个中间缺口状态的实部；(c) 没有 EP 但有 QP，奇异束缚模式与正常零模式和拓扑边界模式几乎没有杂交；(d) 在没有 EP 的情况下，实部有三个中间能隙状态对应于奇异束缚模式和两个拓扑边界模式，虚部有两个点对应于两个拓扑边界模式。

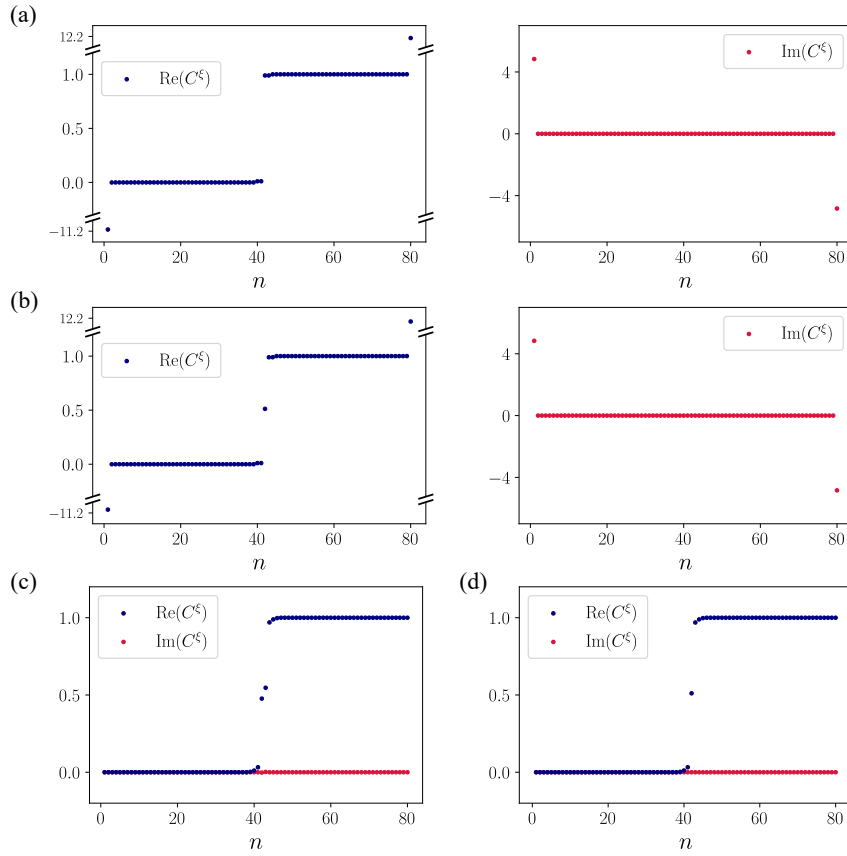


图 3-13 Sec. 3.3.3 案例关联矩阵的特征谱在 PBC (a) 中采用奇异模式；(b) 对于奇异模式和正常准粒子 (QP)，存在中间能隙态；(c) 没有 EP 但有 QP，非奇异束缚态显示与正常零模式杂交；(d) 在没有 EP 的情况下，由于非奇异束缚态，存在体零模式和多个（准）导电模式。

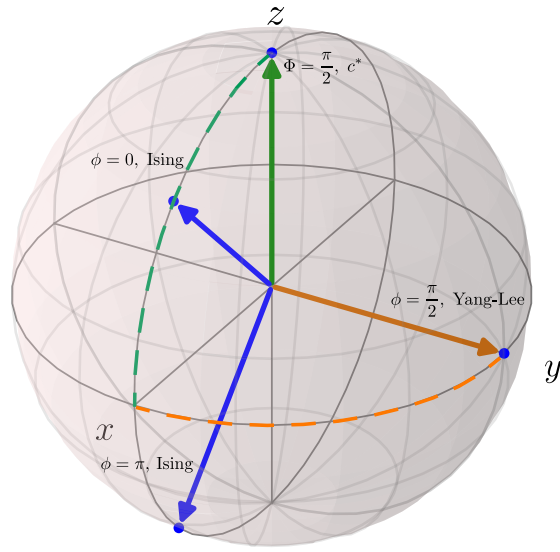


图 3-14 非厄米自旋链模型的经典物理图像，蓝色矢量表示在 Ising 临界点时，单个经典自旋的指向；绿色矢量表示在  $\Phi = \pi/2, c^*$  点的单个经典自旋的指向，可以认为这对应于一种异常简并的态；橙色矢量， $\phi = \pi/2$  对应杨李模型的自旋指向（单比特实际物理图像）。蓝色虚线上可能的点对应  $h_{\text{re}}^2 + h_{\text{im}}^2 = j^2$  上的奇异点。橙色虚线上的可能的点则对应式(3-39)中  $\mathcal{PT}$  破缺线上的奇异点。

## 第4章 开放一维费米子液体熵的含时演化

本文研究了一类一维费米子系统，该系统牺牲了量子系统的厄米性，从而出现了一些有趣的现象，这些现象可以通过开放量子系统来模拟和研究。与封闭系统相比，开放量子系统在含时演化中表现出截然不同的非平凡特性。我们的研究重点关注带有相邻晶格关联的粒子损失的一维费米系统的动力学特性。系统的短时间行为由非厄米有效哈密顿量描述，而长时间行为由林德布拉德主方程控制。我们发现随着时间演化，系统的冯·诺依曼熵具有基于刘维尔谱的普适行为。当引入量子跃迁时，熵在短时间内迅速增加，这主要由于热化效应引起。刘维尔能隙的开合情况主要影响熵在长时间尺度下的衰减行为。有效哈密顿量中的相邻格点量子跃迁算符引起的非对称且非互易跃迁项导致准粒子在动量空间中的左右非对称性。这也会在时间演化早期引入不依赖于相互作用强度的动量空间纠缠，即使在有相互作用的体系中也能观察到这一现象。我们的研究揭示了在非厄米趋肤效应中普遍存在的非厄米性在全时间段的行为和命运，即使是在有相互作用的体系中也同样存在。这将有助于我们更深入地理解非厄米多体系统的特性。

### 4.1 简介

开放量子系统和非厄米物理已成为越来越受研究关注的主题。近年来，在这一领域中已经有许多重要的理论<sup>[59,64,199,289-297]</sup>和实验<sup>[20,89,298-305]</sup>的发现。特别是在凝聚态物理领域，已经有很多研究专注于非厄米皮肤效应<sup>[23,26,32,82,306-310]</sup>，非厄米量子相的对称性和拓扑性<sup>[23-40]</sup>，非厄米系统的量子相变和量子临界性<sup>[260,311-316]</sup>以及非厄米系统中的奇异点<sup>[27-28,309,317-319]</sup>。然而，大多数这类研究都基于非厄米能带理论和短时动力学<sup>[294,301,320-324]</sup>，这些理论源于单粒子非厄米哈密顿量。虽然在很多情况下，有效的非厄米哈密顿量可以描述一部分的效应，但由于其局限性，它无法捕捉开放系统的长时间特征。因此，有必要研究考虑长时间动力学的多体非厄米问题。一般而言，开放系统有效哈密顿量的非厄米性主要源于系统与其环境之间的耦合。它可以包含由于相互作用而导致的单粒子格林函数的自能，或者等效地可以通过与马尔可夫环境的耦合引起，而忽略量子跃迁或通过后选取而引起<sup>[70,266]</sup>。作为短时有效描述的补充，完整的动力学由所谓的 Lindblad 主方程控制<sup>[98,325]</sup>，

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho] := -i[H_0, \rho] + \sum_i \left( L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, \rho\} \right) \quad (4-1)$$

其中  $\rho$  是系统的密度矩阵,  $L_i$  是源自系统和环境之间耦合的跃迁算符。通过忽略  $L_i \rho L_i^\dagger$  项, 有效的非厄米哈密顿量可以表示为  $H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{i}{2} \sum_i L_i^\dagger L_i$ 。量子信息领域的最新进展提供了一些新的工具来研究量子多体系统, 其中最强大的是冯·诺依曼熵(纠缠熵), 它在检测系统的普适性质方面得到了广泛应用, 在各种领域中都有应用<sup>[113,244,326]</sup>。在零温带隙量子系统中, 纠缠熵遵循面积定律<sup>[113,115,327]</sup>。对于临界系统, 纠缠熵具有对数尺度行为<sup>[113,124,243]</sup>。在时间演化下, 冯·诺依曼熵还可以跟踪各种系统中的普适动力学性质, 包括么正<sup>[328-333]</sup>或非么正量子淬火<sup>[334-335]</sup>, 以及一般的耗散系统<sup>[336-339]</sup>、一般的随机动力学<sup>[340-348]</sup>、时间周期驱动系统<sup>[349-352]</sup>或非平衡系统<sup>[6,346,353-354]</sup>。

本文研究了一种广义二聚化模型, 其与环境的耦合由耗散性量子跃迁项描述。我们观察到有效哈密顿量在本征谱方面与 Liouvillian 包含特定信息。通过计算含时关联函数, 我们证明了系统的长期行为与有效非厄米哈密顿量密切相关, 尽管它不受其支配。利用含时关联矩阵方法, 我们获得了时间相关熵, 在时间演化中显示了一些普适特征。我们表明, 当量子跃迁被加入时, 系统的熵在短时间内激增, 表明它很快达到热平衡状态。然后, 熵逐渐下降, 这体现了量子耗散效应。衰减行为不取决于有效哈密顿量是否带隙, 而主要取决于系统的 Liouvillian 谱是否带隙。接下来, 我们将注意力转向动量空间, 并观察到左右移动者的动态存在不对称性, 这是对非厄米趋肤效应(NHSE)动量空间的重现。此外, 我们还提供了一种通过玻色化方法分析的具有相互作用的系统的详细讨论。我们发现, 存在一种相互作用独立的动量空间纠缠状态, 它起源于左右不对称性。总体而言, 我们相信我们的工作可作为未来研究开放量子系统和动态非厄米系统中的多体问题的指导。

## 4.2 模型选取

我们考虑具有跳跃参数  $w$  和  $v$  的二聚链, 其中  $w, v$  是实数, 经历由  $L_{n,A} = \sqrt{\gamma_A}(c_{n,A} - c_{n,B})$  和  $L_{n,B} = \sqrt{\gamma_B}(c_{n,B} - c_{n+1,A})$ , 如图 4-1 所示。为简单起见, 我们只考虑  $w = (1 - \eta), v = \eta, \gamma_A = (1 - 2\lambda)(1 - \eta)$  和  $\gamma_B = (1 - 2\lambda)\eta$   $0 < \lambda, \eta < 1$ 。因此, Liouvillian 被写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\rho = & -i[H_{\text{eff}}, \rho]_{\text{nH}} + \gamma_A \sum_n (c_{n,A} - c_{n,B}) \rho (c_{n,A}^\dagger - c_{n,B}^\dagger) \\ & + \gamma_B \sum_n (c_{n+1,A} - c_{n,B}) \rho (c_{n+1,A}^\dagger - c_{n,B}^\dagger) \end{aligned} \quad (4-2)$$

, 其中  $\rho$  表示系统的(多体)密度矩阵<sup>①</sup>和  $\gamma = \gamma_A + \gamma_B$ 。非厄尔米特换向器

$$-i[H_{\text{eff}}, \rho]_{\text{nH}} = -i(H_{\text{eff}} \rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger).$$

① 在具有粒子损失的开放系统中, 随时间变化的单粒子密度矩阵不为 1, 因为粒子数不守恒。然而, 多体密度矩阵被限制为跟踪 1。

有效哈密顿量由下式给出

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{hop}} + H_{\text{on-site}}, \quad (4-3)$$

其中  $H_{\text{hop}} = \sum_{n=1}^{N-1} (it_2 c_{n+1,A}^\dagger c_{n,B} + it_2' c_{n,B}^\dagger c_{n+1,A}) + \sum_{n=1}^N (t_1 c_{n,B}^\dagger c_{n,A} + it_1' c_{n,A}^\dagger c_{n,B})$  是非互易跳跃部分,  $H_{\text{on-site}} = i\mu \sum_{n=1}^N (c_{n,A}^\dagger c_{n,A} + c_{n,B}^\dagger c_{n,B})$  是具有虚化学势的现场部分。和参数由  $t_1 = (1 - \eta)(1 - \lambda)$ ,  $t_2 = \eta(1 - \lambda)$  给出;  $t_1' = \lambda(1 - \eta)$ ,  $t_2' = -\lambda\eta$ ;  $\mu = (2\lambda - 1)/2$ 。

有效哈密顿量(4-3)提供了系统的准稳态和短时间演化的信息, 而 Liouvillian(4-2)决定了该系统的长时间动力学。由于它的二次形式, 可以通过所谓的第三量子化<sup>[355]</sup>对  $\mathcal{L}$  进行对角化, 得到 Liouvillian 的频谱表示为  $\mathcal{L} = \sum_{\underline{\nu}} \lambda_{\underline{\nu}} \bar{\eta}_{\underline{\nu}}^\dagger \eta_{\underline{\nu}}$ , 其中  $\bar{\eta}_{\underline{\nu}}^\dagger$ ,  $\eta_{\underline{\nu}}$  是费米算符,  $\lambda_{\underline{\nu}}$  表示  $\eta_{\underline{\nu}}$  的费米真空以上的激发的本征值。Liouvillian 超算符作用于 (多体) 密度矩阵, 因此它的完整频谱是从单粒子本征值  $\lambda_{\underline{\nu}}$  生成的多体版本的本征谱。

对于一个非相互作用的系统, 所有信息都被编码在两点关联函数中, 定义为

$$C_{ij}(t) = \text{Tr} [c_i^\dagger c_j \rho(t)] \quad (4-4)$$

其中  $i, j$  是晶格点的指标。关联函数的时间演化由  $\dot{C}_{ij}(t) = \text{Tr} [c_i^\dagger c_j \dot{\rho}(t)]$  决定。结合林德布拉德主方程 (4-1), 含时关联函数的矩阵形式可以由<sup>[?] ]</sup> 得到

$$\mathcal{C}(t) = e^{i\mathcal{D}t} \mathcal{C}(0) e^{-i\mathcal{D}t} \quad (4-5)$$

其中  $\mathcal{D} = H_0^T + i \sum_l L_l^\dagger L_l / 2$  被称为阻尼算符。我们可以很容易地看出阻尼算符的谱与有效哈密顿量 (4-3) 的谱之间的关系。阻尼算符的本征值  $\lambda_{\mathcal{D}}$  与 Liouvillian 谱  $\lambda_{\underline{\nu}}$  满足纯损失或增益时的关系  $\lambda_{\underline{\nu}} = -i\lambda_{\mathcal{D}}$ 。

哈密顿量在动量空间很容易对角化。在周期边界条件下 (PBC), 我们可以得到该模型的能谱,

$$\epsilon_k = \pm \left[ -(t_2' e^{ik} + t_1)(t_2 e^{-ik} + t_1') \right]^{1/2} + i\mu,$$

如图4-2(b) 所示。由于非厄米性质, 该模型在开边界条件下 (OBC) 的能谱与 PBC 的能谱不同。著名的非厄米皮肤效应 (NHSE) 源于非对称跃迁, 也会在 OBC 中发生<sup>[26,82,310]</sup>。在 PBC 中, NHSE 对应于动量空间中的左右不对称性, 这将在后面讨论。根据有效哈密顿量实部的能谱结构, 该系统已被分类为线状能隙相和点状能隙相<sup>①</sup>, 如图4-2(a) 所示。系统的基态由填充所有具有负实数能量的单粒子态构成。相反, Liouvillian 能谱中的能隙通过  $\Lambda = -\min \text{Im}[\epsilon_n]$  与哈密顿量的能谱相关。

① 在对角交线 ( $\lambda(1 - \lambda) = \eta(1 - \eta)$ ) 上, 能谱会穿过瞬变点 (EP) 在动量空间中, 具有奇特的态合并和缺陷行为。关于瞬变点的更多细节可以在文献中找到<sup>[28,197,200]</sup>。

而系统的动力学行为主要取决于 Liouvillian 能谱是否有能隙<sup>[356]</sup>。当  $\eta = 1/2$  时，Liouvillian 全谱的能隙才会关闭。

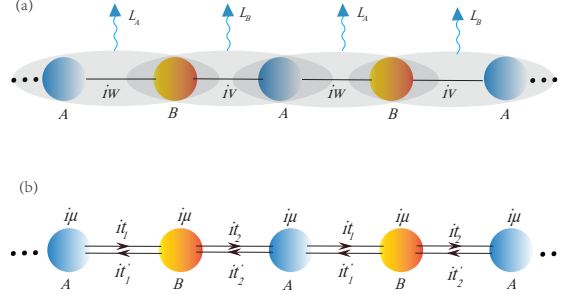


图 4-1 模型的插图。(a) Su-Schrieffer-Heeger 链经历交错的量子跃迁。(b) 在没有量子跃迁项的情况下，有效的非厄米哈密顿量驱动短时动力学

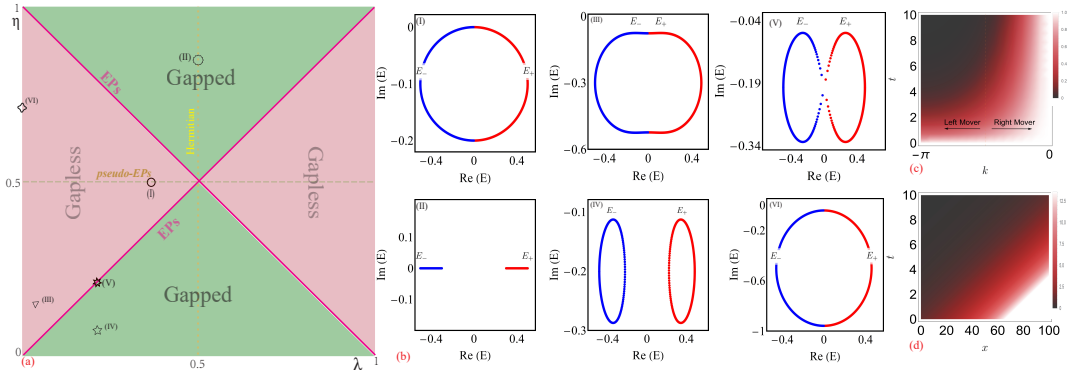


图 4-2 (a) 在参数  $\lambda$  和  $\eta$  变化时，非厄米哈密顿量 (4-3) 的“相图”如图 (a) 所示。绿色区域表示实数谱的能隙相（在完整谱中为线能隙），粉色区域表示实数谱的非能隙相（在完整谱中为点能隙），它们由交叉线分开，上面存在奇异点。黄色虚线  $\lambda = 1/2$  对应厄米情况。 $\lambda > 1/2$  ( $\lambda < 1/2$ ) 对应于具有正（负）虚部谱的情况。棕色虚线表示模型缩减为单带的情况。图中标注不同形状的代表点，它们的能谱在右侧面板中显示。在本文中，我们主要关注 (III)，(I) 和 (IV)。(b) 不同相的完整谱：(I)，(III) 和 (VI) 是点能隙相；(II) 是厄米能隙相；(IV) 是线能隙相；(V) 是奇异相。(c) 粒子数密度  $n_k(t)$  在  $k$  空间随时间的演化，存在左右不对称性。(d) 开放边界条件（OBC）下，实空间粒子数密度  $n_x(t)$  随时间的演化，这是非厄米皮肤效应（NHSE）的遗留效应，也称为手征阻尼效应<sup>[82]</sup>。

### 4.3 熵的含时演化

现在我们考虑系统的短期和长期演化。通过 Eq. (4-5)，可以很容易地计算出单粒子算子的时间依赖性，例如粒子数密度，其结果如图 4-2(c) 和 (d)。为了更好地理解结果，我们考虑具有不同初始状态的双站点系统的启发式示例。

给定时间  $t = 0$ ，我们首先将两点最小系统设置为最大纠缠初始状态作为 Eq. (4-3) 的基态， $|\psi(0)\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle_{AB} - \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle_{AB}$ ，时间相关的密度矩阵<sup>①</sup>可以通

① 请注意，在有粒子损失的开放系统中，随时间变化的单粒子密度矩阵的迹线不是 1，因为粒子数不守恒。

过分析获得 Lindblad 主方程  $\rho_t = \exp(\mathcal{L}_{AB}t)\rho_0$ , 这样

$$\rho_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4\gamma t} & -e^{-4\gamma t} & 0 \\ 0 & -e^{-4\gamma t} & e^{-4\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - 2e^{-4\gamma t} \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

A 的约化密度矩阵为  $\rho_{A,t} = \text{Tr}_B \rho_t = \text{Diag}\{\exp(-4\gamma t)/2, 1 - \exp(-4\gamma t)/2\}$ 。对于纯态, 两部分 A 和 B 之间的量子纠缠可以通过纠缠熵  $S_{A(B)} = -\text{Tr} \rho_{A(B)} \ln \rho_{A(B)}$  来测量。对于纯态, 双分体 A 和 B 之间的量子纠缠可以通过纠缠熵来衡量。对于热化混合态, 熵中包含了经典信息。因此, 可以采用纠缠形成度 (EoF)<sup>[357-358]</sup> 来衡量纯量子纠缠, 它计算创造纯态集合所需的最小纠缠量 (由于纠缠的基本单元是纠缠对)。这个最小值是在所有可能的  $p_i$  概率下的混合态  $\rho_{\text{mixed}}$  的所有可能的纯态分解中进行的。通过两比特协方差  $\mathfrak{C}(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$  来给出 EoF<sup>[357-358]</sup>, 其中  $\lambda_i$  是按降序排列的反转自旋矩阵的特征值的平方根。EoF 由以下公式给出:

$$\mathcal{E}_F(\rho) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}}{2}\right),$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x).$$

对于短时间动力学, 经典信息通过快速热化的表现而不断增加, 其中熵可以捕捉到物理过程, 而 EoF 则忽略了这一过程。然而, 熵可以完美地描述纠缠在长时间范围内的衰减。这表明, 熵可以被描述整个时间演化过程中系统动力学行为的可靠量。具体地, 我们获得了  $\mathfrak{C}(t) = e^{-4\gamma t}$ , 它与  $\rho_t$  的非平凡特征值一致。时间依赖的 EoF 则随着  $\gamma t \exp(-8\gamma t)$  单调减少。

在真正遇到多体问题之前, 我们可以从微观层面上对两个粒子系统的结果进行分析。基态是由三种不同类型的初始状态组成的线性组合, 分别标记为 (i)、(ii) 和 (iii)。当基态带隙存在时, 面积律规定纠缠仅存在于切割点附近, 由  $O(l^0)$  的 (i) 状态贡献。然而, 热化会激发一些  $O(l)$  的 (ii) 状态, 导致两个子系统的总熵演化是 (i) ( $O(l^0)$ ) 和 (ii) ( $O(l)$ ) 的组合。对于无带隙系统, 有  $O(\ln l)$  的 (i) 状态而非  $O(l^0)$ , 而热化过程基本相同。

在存在 Liouvillian 能隙的情况下, 粒子密度的衰减速率由指数因子  $\exp -\Lambda t$  主导。然而, 对于无能隙系统, 在我们的研究中, 密度的集体衰减速率对演化过程的贡献为  $\int d(\delta k) \exp [-(\delta k)^2 t] \sim t^{-1/2}$ 。因此, 蒸发过程中的熵演化取决于 Liouvillian 能隙是否关闭。

然而, 多体密度矩阵被限制为迹线 1。

为了计算空间二分的多体系统的纠缠熵，我们采用了 Refs.<sup>[140-142]</sup> 中开发的关联矩阵方法。尽管问题非常复杂，Wick 定理仍然成立<sup>[246,359-361]</sup>。由于刘维尔算符的二次形式，我们可以使用单粒子图像来描述问题，注意到这里单粒子密度矩阵未被归一化为 1。纠缠哈密顿量仍然可以被写成二次形式，因此可以同时对角化。因此，约化（双正交<sup>[362]</sup>）密度矩阵可以表示为  $\tilde{\rho}_t = \exp(\sum \alpha \varepsilon_\alpha(t) a_\alpha^\dagger a_\alpha) / \mathcal{Z}_0$ ，其中  $\mathcal{Z}_0$  是配分函数和归一化因子，满足  $\text{Tr} \tilde{\rho}_0 = 1$ 。我们在  $t = 0$  时以实带的半填充为系统的基态。纠缠熵由以下公式表示：

$$S(t) = - \sum_{\sigma} [C_{\sigma}(t) \ln C_{\sigma}(t) - C_{\sigma}(t) \ln (\mathcal{Z}_t / \mathcal{Z}_0 - C_{\sigma}(t)) + \mathcal{Z}_t / \mathcal{Z}_0 \ln (1 - C_{\sigma}(0))] \quad (4-7)$$

其中  $C_{\sigma}(t)$  是约化关联矩阵  $\tilde{\rho}_t$  的本征值， $\mathcal{Z}_t = \mathcal{Z}_0 \text{Tr} \tilde{\rho}_t$ 。

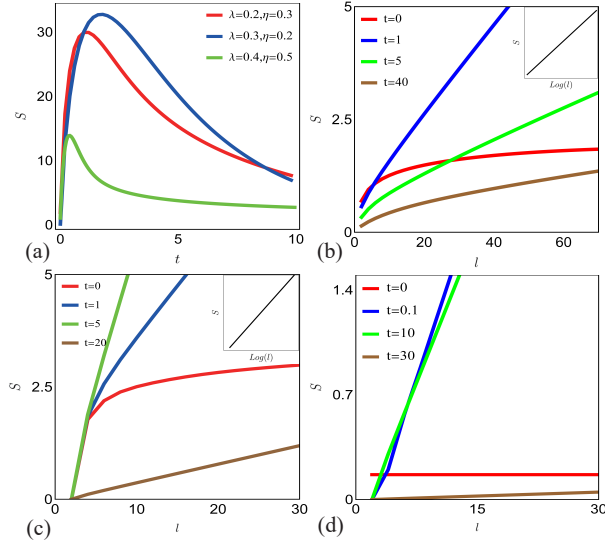


图 4-3 熵的数值计算演示。格点总数取为  $L = 200$  (a)  $S$  vs.  $t$  在 3 个案例  $\lambda = 0.2, \eta = 0.3$  的固定等分中； $\lambda = 0.3, \eta = 0.2$ ； $\lambda = 0.4, \eta = 0.5$ 。(b)  $\lambda = 0.4, \eta = 0.5$  的  $S$  与  $l$  在不同时间尺度下的对比。右上角显示  $S = \alpha \ln [\sin (\pi l / L)]$  在  $t = 0$  处拟合， $\alpha = 0.333$ 。(c)  $S$  与  $l$  的  $\lambda = 0.2, \eta = 0.3$  情况在不同的时间尺度。右上角： $S = \alpha \ln [\sin (\pi l / L)]$  在  $t = 0$  处拟合  $\alpha = 0.333$ 。(d) 在不同时间尺度下  $\lambda = 0.2, \eta = 0.3$  的  $S$  与  $l$  的对比。在  $t = 0$  时，熵是一个常数。

我们将总大小为  $L$  的系统分成长度为  $l$  的 A 部分和长度为  $L - l$  的 B 部分。在  $t = 0$  时，能隙相分离的相中的熵  $S$  等于一个与大小无关的常数  $a_0$ ，如图 4-3(d) 所示，符合面积律。对于无能隙相，如图 4-3(b)(c) 所示，熵的拟合函数为  $S = 0.333 \ln [\sin (\pi l / L)] + c_0$ ，对应于一个中心荷  $c = 1$  的共形场论<sup>[363-364]</sup>。上述结果可以通过 Toeplitz 行列式解析获得<sup>[144]</sup>。关于熵的缺乏任何  $l$  线性依赖的特性是一维系统中两个点状费米面的结果。在这种情况下观察到的对数标度归因于这些费

米点上占据态的不连续性。

然而，当量子跃迁开启时，系统经历了热化，费米面在时间演化中不再明确定义。这导致随着系统演化而出现  $l$  线性依赖的熵。

接下来我们计算熵  $S$  的时间演化，结果与我们的预期一致。我们可以使用  $S(t) \sim a(t)\ln l + b(t)l + c(t)$  来描述所有情况下的全时间尺度行为，仔细的拟合表明，对于无能隙的刘维尔谱， $a(t)$  和  $c(t)$  以  $t^{-1/2}$  方式单调下降，对于有能隙的刘维尔谱则为  $\exp -\Lambda t$ 。 $b(t)$  的时间依赖性与  $S(t)$  类似，它在小  $t$  时呈  $-t\ln t$  增长，在无能隙的刘维尔谱下以  $b(t) \sim t^{-1/2}\ln t$  的速率衰减，在有能隙的刘维尔谱下则以  $b(t) \sim t \exp -\Lambda t$  的速率衰减。这种衰减是由于粒子损失引起的量子效应，这也反映在大  $t$  时的纠缠度衰减中。值得注意的是，图4-2(e) 中的时间依赖熵在短时间极限下呈现相同的增长行为，可以用函数  $S(t) \sim -t\ln t$  来描述。该公式与文献<sup>[339]</sup>中报告的一维耗散相互作用费米子的短时间熵增长表达式相一致。我们强调，在一维费米子液体中，短时间极限下熵增长的这种行为是普遍存在的<sup>①</sup>。

#### 4.4 动量空间问题

将式(4-5)给出的关联函数傅里叶变换到动量空间，即可得到动量空间中准粒子的动力学，如图4-2(d) 所示。该图表现出左右不对称性，其中群速度  $v = dE/dk$  的符号标识左移（右移）的粒子，使得  $\text{sign}[v] = -1(+1)$  对应于左移（右移）的粒子。这种不对称性是非互补跃迁的结果，表明在有端点的 OBC 中，粒子会倾向于积累在一侧。

现在，我们将注意力转向同时受到密度-密度相互作用和粒子损失作用的系统的时间演化。假设在  $t = 0$  时激活粒子损失。在短时间内，费米面仍然是明确定义的，因此可以通过玻色化使用拉丁格液体哈密顿量来检查短时间动力学：

$$H = \sum_{q \neq 0} v|q| b_q^\dagger b_q + \frac{g_2|q|}{2} [b_q b_{-q} + b_q^\dagger b_{-q}^\dagger], \quad (4-8)$$

其中  $v|q|$  表示具有速度  $v$  的能谱， $b_q^\dagger = i\sqrt{1/|q|} \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k$ ：在费米面周围创建电子-空穴对，参数  $g_2$  表示相互作用的强度。玻色化之后，量子跃迁算符变成了玻色子算符的线性组合的指数。由于哈密顿量是二次的， $\rho$  的非幺正动力学编码在动量空间关联函数  $\mathcal{C}_{k+q,k}(t) = \text{Tr} [c_{k+q}^\dagger c_k \rho(t)]$  中。利用式(4-2)， $b_q^\dagger(t)$  的运动方程为

$$\partial_t b_q^\dagger = -4\gamma b_q^\dagger + iv|q| b_q^\dagger - ig_2|q| b_{-q}, \quad \partial_t b_{-q} = -iv|q| b_{-q} - ig_2|q| b_q^\dagger. \quad (4-9)$$

① Toeplitz 行列式的解析计算表明，当  $t$  很大且  $\rho_t \ll 1$  时， $a(t) \sim \text{Li}_2 \rho_t \sim \rho_t$ 。

尽管获得完整解决方案很复杂，但我们可以专注于短时间动力学，将  $b_q^\dagger(t)$  和  $b_{-q}(t)$  表示为

$$\begin{aligned} b_q^\dagger(t) &= \exp(iv|q|t - 4\gamma t)b_q^\dagger - ig_2|q|tb_{-q}; \\ b_{-q}(t) &= \exp(-iv|q|t)(1 - ig_2|q|t)b_{-q} - \frac{1}{2}g_2^2|q|^2t^2b_q^\dagger, \end{aligned} \quad (4-10)$$

忽略高阶项。然而，在动量空间中将系统平等地二分为两部分 ( $q > 0$  和  $q < 0$ ) 并不总是可能的。这是因为  $q > 0$  的部分呈指数衰减，而  $q < 0$  处的粒子数几乎保持不变。

此外，动量空间的纠缠熵 (MSEE) 应该以  $\exp(-8\gamma t)$  的总体衰减因子展现出  $q$  的总和。然而，如果时间  $t$  足够短，以至于损失事件不会发生，密度矩阵就会被简单地重新规范化， $[b_q(t), b_q^\dagger(t)] = 1$  的规范对易关系可以通过设置  $b_q^\dagger(t) = u_q(t)b_q^\dagger + v_q(t)b_{-q}$  来满足<sup>①</sup>。我们可以将短时间的伪 Bogoliubov 系数计算为  $u_q(t) \sim 1 + iv|q|t - 4\gamma t$  和  $v_q(t) \sim -2\sqrt{2}i\gamma^{1/2}t^{1/2}$ ， $g_2$  的依赖仅出现在高阶项中。因此，MSEE 随时间增加， $S \sim -t \ln t$  ( $t \ll 1$ )，表明存在一个与相互作用无关的  $q, -q$  纠缠，其起源于  $L_q$  的相干性质。这个结果反映了非对称跃迁的相关效应，其起源与 NHSE 相同。

## 4.5 总结和讨论

我们研究了一维动力学量子液体在不同情境下的熵。虽然熵提供了超越量子纠缠的信息，但它提供了系统时间演化的更全面的表示。虽然对数纠缠消极度<sup>[138-139]</sup>是分析纯量子纠缠谱的可行方法，但它的计算复杂度相当大。冷原子光学格系统的操作使得实验工程化了多体开放量子系统，其中原子之间的耦合和平行干涉激光可以被精细调节<sup>[365]</sup>。或者，可以通过控制量子比特之间的驱动频率和耦合，在大规模耗散性三能级超导量子电路上模拟多体动力学。非厄米基态通过量子测量制备<sup>[232]</sup>，并且可以使用多种协议<sup>[366-369]</sup>来测量纠缠。此外，其他数值或基于量子比特的量子模拟技术，例如论文<sup>[99,370]</sup>中所描述的，也适用于开放系统。

① 忽略非线性的  $b_q^\dagger, b_q$  项和  $b_{-q}(t) = u_q^*(t)b_{-q} - v_q(t)b_q^\dagger$ 。假设  $|u_q(t)|^2 + |v_q(t)|^2 = 1$ ，如文献<sup>[335]</sup>中的  $\mathcal{PT}$ -对称非厄米淬火过程一样。

## 结 论

本论文旨在探究非厄米物理在量子层面的独特性质。

(1) 我们提出了一个非厄米的一维费米子格点模型，通过针对手征费米子性质的一系列计算，明确了该模型作为手征费米子问题的解决方案的可行性，并创造性地破除了不可行定理。该方案和思想为更多具有量子反常的场论模型提供了全新的解决思路，甚至为大自然中的手性现象提供了一种创造性的新起源。

(2) 我们构造了一个一般化的费米子二带模型，并计算分析了带有不同类型谱奇异点的非厄米模型的纠缠熵和纠缠谱，建立了不同类型奇异点和可能的实的非么正共形场论和复共形场论之间的联系。同时，我们提出了能谱中的零能奇异点对纠缠谱的影响，即独立于拓扑零模和常规零模。该研究为人们探索和理解一级相变以及其他新奇相变和量子纠缠行为提供了全新的思路。

(3) 我们通过构造一般化的非厄米费米子模型和利用我们创立的针对开放系统的含时费米子纠缠熵计算方案，研究了一维费米液体随时间演化所表现出来的普适行为。通过半解析和数值结果，我们发现了一维费米液体在短时间内的熵的增加行为具有普适性，不管有无相互作用。此外，根据刘维谱的性质，我们提出了适当的拟合公式，用于描述长时间熵的衰变行为。这对人们对量子开放系统和非厄米系统的含时演化提供了明确的指导。

综上，以上三个方面均属于当前非厄米物理研究中较为独树一帜的，对加深人们对非厄米性的理解开拓了新的道路。

需要注意的是，在非厄米强关联模型中，由于缺乏合适的数值手段，目前的研究只能局限于少数格点的严格对角化或者在一些可积模型中进行严格解。对广泛的非厄米现象，包括非厄米性引起的相变或奇异点导致的非么正量子临界行为，以及开放系统中的非平衡物理，需要开发能够针对一般性非厄米模型的有效数值方法，例如适应非厄米哈密顿量的张量网络方法等。

此外，对于强关联体系中，非厄米性、拓扑性质及量子纠缠性质等之间的关联和相互影响，人们还缺乏基本的认识。这是值得在未来进一步深入讨论的课题。

## 参考文献

- [1] GAMOW G. Zur quantentheorie des atomkernes[J]. Zeitschrift für Physik, 1928, 51(3-4): 204-212.
- [2] SIEGERT A J F. On the Derivation of the Dispersion Formula for Nuclear Reactions[J/OL]. Phys. Rev., 1939, 56(8): 750-752[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.750>.
- [3] MAJORANA E. Sulla formazione dello ione molecolare di elio[J]. Il Nuovo Cimento (1924-1942), 1931, 8: 22-28.
- [4] FESHBACH H. The Optical Model and Its Justification[J/OL]. Annual Review of Nuclear Science, 1958, 8(1): 49-104[2023-03-20]. <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.08.120158.000405>.
- [5] BREUER H P, PETRUCCIONE F. Oxford graduate texts: The theory of open quantum systems [M]. Oxford University Press, 2002.
- [6] BREUER H P, LAINE E M, PILO J, et al. *Colloquium* : Non-Markovian dynamics in open quantum systems[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2016, 88(2): 021002[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.021002>.
- [7] MANZANO D. A short introduction to the Lindblad master equation[J/OL]. AIP Advances, 2020, 10(2): 025106[2023-03-20]. <https://aip.scitation.org/doi/full/10.1063/1.5115323>.
- [8] FEYNMAN R, VERNON F. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. Ann. Phys, 1963, 24: 118-173.
- [9] CALZETTA E, HU B L. Cambridge monographs on mathematical physics: Nonequilibrium quantum field theory[M]. Cambridge University Press, 2008.
- [10] MAKRI K G, EL-GANAINY R, CHRISTODOULIDES D N, et al. Beam Dynamics in P T Symmetric Optical Lattices[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2008, 100(10): 103904[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.103904>.
- [11] MUSSLIMANI Z H, MAKRI K G, EL-GANAINY R, et al. Optical Solitons in P T Periodic Potentials[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2008, 100(3): 030402[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.030402>.
- [12] REGENSBURGER A, BERSCH C, MIRI M A, et al. Parity-time synthetic photonic lattices [J/OL]. Nature, 2012, 488(7410): 167-171[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/nature11298>. DOI: 10.1038/nature11298.
- [13] WANG H, ZHANG X, HUA J, et al. Topological physics of non-Hermitian optics and photonics: a review[J/OL]. J. Opt., 2021, 23(12): 123001[2023-04-03]. <https://dx.doi.org/10.1088/2040-8986/ac2e15>.
- [14] PARTO M, LIU Y G N, BAHARI B, et al. Non-Hermitian and topological photonics: optics at an exceptional point:[J/OL]. Nanophotonics, 2021, 10(1): 403-423[2023-04-03]. <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/nanoph-2020-0434/html>.

- 
- [15] LONGHI S. Parity-time symmetry meets photonics: A new twist in non-Hermitian optics[J/OL]. EPL, 2018, 120(6): 64001[2023-04-03]. <https://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/120/64001>.
  - [16] STEGMAIER A, IMHOF S, HELBIG T, et al. Topological Defect Engineering and P T Symmetry in Non-Hermitian Electrical Circuits[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 126(21): 215302[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.215302>.
  - [17] GHATAK A, BRANDENBOURGER M, VAN WEZEL J, et al. Observation of non-Hermitian topology and its bulk-edge correspondence in an active mechanical metamaterial[J/OL]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2020, 117(47): 29561-29568[2023-04-03]. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.2010580117>.
  - [18] SCHOMERUS H. Nonreciprocal response theory of non-Hermitian mechanical metamaterials: Response phase transition from the skin effect of zero modes[J/OL]. Phys. Rev. Research, 2020, 2(1): 013058[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.013058>.
  - [19] ZHU X, RAMEZANI H, SHI C, et al. P T -Symmetric Acoustics[J/OL]. Phys. Rev. X, 2014, 4(3): 031042[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.4.031042>.
  - [20] ZHU W, FANG X, LI D, et al. Simultaneous Observation of a Topological Edge State and Exceptional Point in an Open and Non-Hermitian Acoustic System[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(12): 124501[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.124501>.
  - [21] ZHANG Z, ROSENDO LÓPEZ M, CHENG Y, et al. Non-Hermitian Sonic Second-Order Topological Insulator[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 122(19): 195501[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.195501>.
  - [22] ZHANG L, YANG Y, GE Y, et al. Acoustic non-Hermitian skin effect from twisted winding topology[J/OL]. Nat Commun, 2021, 12(1): 6297[2023-04-03]. <https://www.nature.com/articles/s41467-021-26619-8>. DOI: 10.1038/s41467-021-26619-8.
  - [23] LEE T E. Anomalous Edge State in a Non-Hermitian Lattice[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(13): 133903[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.133903>.
  - [24] KAWABATA K, BESSHO T, SATO M. Classification of Exceptional Points and Non-Hermitian Topological Semimetals[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(6): 066405[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.066405>.
  - [25] LEYKAM D, BLIOKH K Y, HUANG C, et al. Edge Modes, Degeneracies, and Topological Numbers in Non-Hermitian Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118(4): 040401[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.040401>.
  - [26] YAO S, WANG Z. Edge States and Topological Invariants of Non-Hermitian Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(8): 086803[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.086803>.
  - [27] DING K, MA G, XIAO M, et al. Emergence, Coalescence, and Topological Properties of Multiple Exceptional Points and Their Experimental Realization[J/OL]. Phys. Rev. X, 2016, 6(2): 021007[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.021007>.

- 
- [28] BERGHOLTZ E J, BUDICH J C, KUNST F K. Exceptional topology of non-Hermitian systems [J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2021, 93(1): 015005[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.93.015005>.
- [29] HELBIG T, HOFMANN T, IMHOF S, et al. Generalized bulk - boundary correspondence in non-Hermitian topoelectrical circuits[J/OL]. *Nat. Phys.*, 2020, 16(7): 747-750[2021-10-12]. <http://www.nature.com/articles/s41567-020-0922-9>. DOI: 10.1038/s41567-020-0922-9.
- [30] LUO X W, ZHANG C. Higher-Order Topological Corner States Induced by Gain and Loss [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123(7): 073601[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.073601>.
- [31] YANG Z, CHIU C K, FANG C, et al. Jones Polynomial and Knot Transitions in Hermitian and non-Hermitian Topological Semimetals[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124(18): 186402 [2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.186402>.
- [32] BORGNA D S, KRUCHKOV A J, SLAGER R J. Non-Hermitian Boundary Modes and Topology[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124(5): 056802[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.056802>.
- [33] XUE H, WANG Q, ZHANG B, et al. Non-Hermitian Dirac Cones[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124(23): 236403[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.236403>.
- [34] SONG F, YAO S, WANG Z. Non-Hermitian Skin Effect and Chiral Damping in Open Quantum Systems[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123(17): 170401[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.170401>.
- [35] SONG A Y, SUN X Q, DUTT A, et al. P T -Symmetric Topological Edge-Gain Effect[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 125(3): 033603[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.033603>.
- [36] ZHOU H, LEE J Y. Periodic table for topological bands with non-Hermitian symmetries[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 2019, 99(23): 235112[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.235112>.
- [37] LIU T, ZHANG Y R, AI Q, et al. Second-Order Topological Phases in Non-Hermitian Systems [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 122(7): 076801[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.076801>.
- [38] KAWABATA K, HIGASHIKAWA S, GONG Z, et al. Topological unification of time-reversal and particle-hole symmetries in non-Hermitian physics[J/OL]. *Nat Commun*, 2019, 10(1): 297 [2021-10-12]. <http://www.nature.com/articles/s41467-018-08254-y>. DOI: 10.1038/s41467-018-08254-y.
- [39] LIANG S D, HUANG G Y. Topological invariance and global Berry phase in non-Hermitian systems[J/OL]. *Phys. Rev. A*, 2013, 87(1): 012118[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.012118>.
- [40] SATO M, HASEBE K, ESAKI K, et al. Time-Reversal Symmetry in Non-Hermitian Systems [J/OL]. *Progress of Theoretical Physics*, 2012, 127(6): 937-974[2021-10-12]. <http://arxiv.org/abs/1106.1806>. DOI: 10.1143/PTP.127.937.

- 
- [41] YANG C N, LEE T D. Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation[J/OL]. Phys. Rev., 1952, 87(3): 404-409[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.87.404>.
- [42] LEE T D, YANG C N. Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model[J/OL]. Phys. Rev., 1952, 87(3): 410-419[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.87.410>.
- [43] FISHER M E. Yang-Lee Edge Singularity and  $\phi^3$  Field Theory[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1978, 40(25): 1610-1613[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.1610>.
- [44] CARDY J L. Conformal Invariance and the Yang-Lee Edge Singularity in Two Dimensions[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1985, 54(13): 1354-1356[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.1354>.
- [45] MAASSARANI Z, SERBAN D. Non-unitary conformal field theory and logarithmic operators for disordered systems[J/OL]. Nuclear Physics B, 1997, 489(3): 603-625[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032139700014X>. DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00014-X.
- [46] BENDER C M, BOETTCHER S, JONES H F, et al. Bound states of non-Hermitian quantum field theories[J/OL]. Physics Letters A, 2001, 291(4): 197-202[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960101007459>. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00745-9.
- [47] CASTRO-ALVAREDO O A, DOYON B, RAVANINI F. Irreversibility of the renormalization group flow in non-unitary quantum field theory\*[J/OL]. J. Phys. A: Math. Theor., 2017, 50(42): 424002[2023-04-03]. <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aa8a10>.
- [48] ALEXANDRE J, BENDER C M, MILLINGTON P. Light neutrino masses from a non-Hermitian Yukawa theory[J/OL]. J. Phys.: Conf. Ser., 2017, 873(1): 012047[2023-04-03]. <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/873/1/012047>.
- [49] BIANCHINI D, CASTRO-ALVAREDO O A, DOYON B. Entanglement entropy of non-unitary integrable quantum field theory[J/OL]. Nuclear Physics B, 2015, 896: 835-880[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032131500173X>. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2015.05.013.
- [50] BENDER C M, MILTON K A. A nonunitary version of massless quantum electrodynamics possessing a critical point[J/OL]. J. Phys. A: Math. Gen., 1999, 32(7): L87[2023-04-03]. <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/32/7/001>.
- [51] FRING A, TAIRA T. Pseudo-Hermitian approach to Goldstone's theorem in non-Abelian non-Hermitian quantum field theories[J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 101(4): 045014[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.045014>.
- [52] MOFFAT J W. Noncommutative quantum gravity[J/OL]. Physics Letters B, 2000, 491(3): 345-352[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269300010649>. DOI: 10.1016/S0370-2693(00)01064-9.

- 
- [53] ARAGEORGIS A, EARMAN J, RUETSCHKE L. Weyling the time away: the non-unitary implementability of quantum field dynamics on curved spacetime[J/OL]. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 2002, 33 (2): 151-184[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1355219802000060>. DOI: 10.1016/S1355-2198(02)00006-0.
  - [54] MANNHEIM P. Astrophysical evidence for the non-Hermitian but PT-symmetric Hamiltonian of conformal gravity[J/OL]. *Fortschritte der Physik*, 2013, 61(2-3): 140-154[2023-04-03]. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/prop.201200100>.
  - [55] YEŞİLTAS . Non-Hermitian Dirac Hamiltonian in Three-Dimensional Gravity and Pseudosupersymmetry[J/OL]. *Advances in High Energy Physics*, 2015, 2015: e484151[2023-04-03]. <https://www.hindawi.com/journals/ahep/2015/484151/>. DOI: 10.1155/2015/484151.
  - [56] LV C, ZHANG R, ZHAI Z, et al. Curving the space by non-Hermiticity[J/OL]. *Nat Commun*, 2022, 13(1): 2184[2023-04-03]. <https://www.nature.com/articles/s41467-022-29774-8>. DOI: 10.1038/s41467-022-29774-8.
  - [57] JU C Y, MIRANOWICZ A, MINGANTI F, et al. Einstein's quantum elevator: Hermitization of non-Hermitian Hamiltonians via a generalized vielbein formalism[J/OL]. *Phys. Rev. Research*, 2022, 4(2): 023070[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.4.023070>.
  - [58] ASHIDA Y, GONG Z, UEDA M. Non-Hermitian physics[J/OL]. *Advances in Physics*, 2020, 69(3): 249-435[2021-10-12]. <https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991>.
  - [59] BENDER C M, BOETTCHER S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having pt symmetry[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 80: 5243-5246. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.5243>.
  - [60] CHIU C K, TEO J C Y, SCHNYDER A P, et al. Classification of topological quantum matter with symmetries[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2016, 88(3): 035005[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.035005>.
  - [61] CHEN X, GU Z C, LIU Z X, et al. Symmetry-Protected Topological Orders in Interacting Bosonic Systems[J/OL]. *Science*, 2012, 338(6114): 1604-1606[2023-03-20]. <https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.1227224>.
  - [62] CHEN X, GU Z C, LIU Z X, et al. Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 2013, 87(15): 155114[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.87.155114>.
  - [63] GONG Z, ASHIDA Y, KAWABATA K, et al. Topological phases of non-hermitian systems [J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2018, 8: 031079. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.031079>.
  - [64] KAWABATA K, SHIOZAKI K, UEDA M, et al. Symmetry and topology in non-hermitian physics[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2019, 9: 041015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.041015>.
  - [65] LIU C H, JIANG H, CHEN S. Topological classification of non-hermitian systems with reflection symmetry[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 2019, 99: 125103. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.125103>.

- 
- [66] XI W, ZHANG Z H, GU Z C, et al. Classification of topological phases in one dimensional interacting non-Hermitian systems and emergent unitarity[J/OL]. *Science Bulletin*, 2021, 66(17): 1731-1739. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2095927321003066>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scib.2021.04.027>.
  - [67] BERRY M. Physics of Nonhermitian Degeneracies[J/OL]. *Czechoslovak Journal of Physics*, 2004, 54(10): 1039-1047[2021-10-20]. <http://link.springer.com/10.1023/B:CJOP.0000044002.05657.04>.
  - [68] LEE C H. Exceptional Boundary States and negative Entanglement Entropy[A/OL]. 2020 [2021-12-19]. <http://arxiv.org/abs/2011.09505>.
  - [69] YANG Z, SCHNYDER A P, HU J, et al. Fermion doubling theorems in two-dimensional non-hermitian systems for fermi points and exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 126: 086401. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.086401>.
  - [70] KOZII V, FU L. Non-Hermitian Topological Theory of Finite-Lifetime Quasiparticles: Prediction of Bulk Fermi Arc Due to Exceptional Point[A/OL]. 2017[2021-10-20]. <http://arxiv.org/abs/1708.05841>.
  - [71] TZENG Y C, JU C Y, CHEN G Y, et al. Hunting for the non-hermitian exceptional points with fidelity susceptibility[J/OL]. *Phys. Rev. Res.*, 2021, 3: 013015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.3.013015>.
  - [72] MANDAL I, BERGHOLTZ E J. Symmetry and higher-order exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127: 186601. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.186601>.
  - [73] TANG W, JIANG X, DING K, et al. Exceptional nexus with a hybrid topological invariant [J/OL]. *Science*, 2020, 370(6520): 1077-1080. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.abd8872>.
  - [74] TANG W, DING K, MA G. Experimental realization of non-Abelian permutations in a three-state non-Hermitian system[J/OL]. *National Science Review*, 2022, 9(11). <https://doi.org/10.1093/nsr/nwac010>.
  - [75] GUO C X, CHEN S, DING K, et al. Exceptional non-abelian topology in multiband non-hermitian systems[A]. 2022. arXiv: 2210.17031.
  - [76] ZHANG Q, ZHAO L, LIU X, et al. Experimental characterization of three-band braid relations in non-hermitian acoustic systems[A]. 2022. arXiv: 2212.07609.
  - [77] DING K, MA G, XIAO M, et al. Emergence, coalescence, and topological properties of multiple exceptional points and their experimental realization[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2016, 6: 021007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.021007>.
  - [78] HATANO N, NELSON D R. Vortex pinning and non-hermitian quantum mechanics[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 1997, 56: 8651-8673. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.56.8651>.
  - [79] HATANO N, NELSON D R. Non-hermitian delocalization and eigenfunctions[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 1998, 58: 8384-8390. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.58.8384>.
  - [80] LI L, LEE C H, GONG J. Topological switch for non-hermitian skin effect in cold-atom systems with loss[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124: 250402. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.250402>.

- [81] GUO C X, LIU C H, ZHAO X M, et al. Exact solution of non-hermitian systems with generalized boundary conditions: Size-dependent boundary effect and fragility of the skin effect[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 127: 116801. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.116801>.
- [82] SONG F, YAO S, WANG Z. Non-Hermitian Topological Invariants in Real Space[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(24): 246801[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.246801>.
- [83] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Soliton excitations in polyacetylene[J/OL]. Phys. Rev. B, 1980, 22: 2099-2111. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.22.2099>.
- [84] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Solitons in polyacetylene[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1979, 42: 1698-1701. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1698>.
- [85] KUNST F K, EDVARDSSON E, BUDICH J C, et al. Biorthogonal bulk-boundary correspondence in non-hermitian systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121: 026808. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.026808>.
- [86] YANG Z, ZHANG K, FANG C, et al. Non-hermitian bulk-boundary correspondence and auxiliary generalized brillouin zone theory[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 125: 226402. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.226402>.
- [87] REITHMAIER J P, SK G, LFFLER A, et al. Strong coupling in a single quantum dot – semiconductor microcavity system[J/OL]. Nature, 2004, 432(7014): 197-200[2023-04-05]. <https://www.nature.com/articles/nature02969>. DOI: 10.1038/nature02969.
- [88] ZHANG W, OUYANG X, HUANG X, et al. Observation of non-hermitian topology with nonunitary dynamics of solid-state spins[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 127: 090501. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.090501>.
- [89] WU Y, LIU W, GENG J, et al. Observation of parity-time symmetry breaking in a single-spin system[J/OL]. Science, 2019, 364(6443): 878-880. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aaw8205>.
- [90] NAKAMURA Y, PASHKIN Y A, TSAI J S. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box[J/OL]. Nature, 1999, 398(6730): 786-788[2023-04-03]. <https://www.nature.com/articles/19718>. DOI: 10.1038/19718.
- [91] GUTHRIE A, SATRYA C D, CHANG Y C, et al. Cooper-Pair Box Coupled to Two Resonators: An Architecture for a Quantum Refrigerator[J/OL]. Phys. Rev. Applied, 2022, 17(6): 064022 [2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.17.064022>.
- [92] FITZPATRICK M, SUNDARESAN N M, LI A C Y, et al. Observation of a dissipative phase transition in a one-dimensional circuit qed lattice[J/OL]. Phys. Rev. X, 2017, 7: 011016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.011016>.
- [93] HUANG Y, YIN Z Q, YANG W L. Realizing a topological transition in a non-hermitian quantum walk with circuit qed[J/OL]. Phys. Rev. A, 2016, 94: 022302. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.022302>.
- [94] CALDEIRA A O, LEGGETT A J. Quantum tunnelling in a dissipative system[J/OL]. Annals of Physics, 1983, 149(2): 374-456[2023-04-04]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491683902026>. DOI: 10.1016/0003-4916(83)90202-6.

- 
- [95] COULE D H, MARTIN J. Quantum cosmology and open universes[J/OL]. Phys. Rev. D, 2000, 61(6): 063501[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.063501>.
  - [96] SHANDERA S, AGARWAL N, KAMAL A. Open quantum cosmological system[J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 98(8): 083535[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.083535>.
  - [97] GORINI V, KOSSAKOWSKI A, SUDARSHAN E C G. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 1976, 17(5): 821-825. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.522979>.
  - [98] LINDBLAD G. On the generators of quantum dynamical semigroups[J/OL]. Comm. Math. Phys., 1976, 48(2): 119-130. <https://link.springer.com/article/10.10072FBF01608499>.
  - [99] WEIMER H, KSHETRIMAYUM A, ORÚS R. Simulation methods for open quantum many-body systems[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2021, 93(1): 015008[2021-10-18]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.93.015008>.
  - [100] BENGURIA R, KAC M. Quantum Langevin Equation[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1981, 46(1): 1-4[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.46.1>.
  - [101] FORD G W, LEWIS J T, O'CONNELL R F. Quantum Langevin equation[J/OL]. Phys. Rev. A, 1988, 37(11): 4419-4428[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.37.4419>.
  - [102] PAN L, CHEN X, CHEN Y, et al. Non-hermitian linear response theory[J/OL]. Nature Physics, 2020, 16(7): 767-771. <http://dx.doi.org/10.1038/s41567-020-0889-6>.
  - [103] WISEMAN H, MILBURN G. Quantum measurement and control[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
  - [104] BELLOMO B, LO FRANCO R, COMPAGNO G. Non-Markovian Effects on the Dynamics of Entanglement[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2007, 99(16): 160502[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.160502>.
  - [105] PIILO J, MANISCALCO S, HÄRKÖNEN K, et al. Non-Markovian Quantum Jumps[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2008, 100(18): 180402[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.180402>.
  - [106] DE VEGA I, ALONSO D. Dynamics of non-Markovian open quantum systems[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2017, 89(1): 015001[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.015001>.
  - [107] HORODECKI R, HORODECKI P, HORODECKI M, et al. Quantum entanglement[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2009, 81: 865-942. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>.
  - [108] LAFLORENCIE N. Quantum entanglement in condensed matter systems[J/OL]. Physics Reports, 2016, 646: 1-59. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157316301582>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.06.008>.
  - [109] ZENG B, CHEN X, ZHOU D L, et al. Quantum information meets quantum matter[M]. Springer, 2019.
  - [110] PEREZ-GARCIA D, VERSTRAETE F, WOLF M M, et al. Matrix Product State Representations[M/OL]. arXiv, 2007[2023-04-03]. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0608197>. DOI: 10.48550/arXiv.quant-ph/0608197.

- 
- [111] ORÚS R. A practical introduction to tensor networks: Matrix product states and projected entangled pair states[J/OL]. *Annals of Physics*, 2014, 349: 117-158[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491614001596>. DOI: 10.1016/j.aop.2014.06.013.
  - [112] NISHIOKA T. Entanglement entropy: Holography and renormalization group[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2018, 90: 035007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.035007>.
  - [113] EISERT J, CRAMER M, PLENIO M B. Colloquium: Area laws for the entanglement entropy[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, 82: 277-306. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.277>.
  - [114] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information: 10th anniversary edition[M]. Cambridge University Press, 2010.
  - [115] WOLF M M, VERSTRAETE F, HASTINGS M B, et al. Area Laws in Quantum Systems: Mutual Information and Correlations[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100(7): 070502[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.070502>.
  - [116] EISERT J, CRAMER M, PLENIO M B. *Colloquium* : Area laws for the entanglement entropy[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, 82(1): 277-306[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.277>.
  - [117] BRANDÃO F G S L, HORODECKI M. An area law for entanglement from exponential decay of correlations[J/OL]. *Nature Phys*, 2013, 9(11): 721-726[2021-10-20]. <https://www.nature.com/articles/nphys2747>. DOI: 10.1038/nphys2747.
  - [118] BRAVYI S, HASTINGS M B, VERSTRAETE F. Lieb-Robinson Bounds and the Generation of Correlations and Topological Quantum Order[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 97(5): 050401[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.050401>.
  - [119] VERSTRAETE F, MURG V, CIRAC J. Matrix product states, projected entangled pair states, and variational renormalization group methods for quantum spin systems[J/OL]. *Advances in Physics*, 2008, 57(2): 143-224[2023-04-03]. <https://doi.org/10.1080/14789940801912366>.
  - [120] CIRAC J I, PÉREZ-GARCÍA D, SCHUCH N, et al. Matrix product states and projected entangled pair states: Concepts, symmetries, theorems[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2021, 93(4): 045003[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.93.045003>.
  - [121] VERSTRAETE F, WOLF M M, PEREZ-GARCIA D, et al. Criticality, the Area Law, and the Computational Power of Projected Entangled Pair States[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 96(22): 220601[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.220601>.
  - [122] CINCIO L, DZIARMAGA J, RAMS M M. Multiscale Entanglement Renormalization Ansatz in Two Dimensions: Quantum Ising Model[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100(24): 240603[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.240603>.
  - [123] EVENBLY G, VIDAL G. Quantum Criticality with the Multi-scale Entanglement Renormalization Ansatz[M/OL]//AVELLA A, MANCINI F. Springer Series in Solid-State Sciences: Strongly Correlated Systems: Numerical Methods. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 99-130[2023-04-03]. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-35106-8\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-35106-8_4).
  - [124] SWINGLE B. Entanglement Entropy and the Fermi Surface[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105(5): 050502[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.050502>.

- 
- [125] OGAWA N, TAKAYANAGI T, UGAJIN T. Holographic Fermi surfaces and entanglement entropy[J/OL]. J. High Energ. Phys., 2012, 2012(1): 125[2023-04-03]. [https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2012\)125](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2012)125).
  - [126] LUITZ D J, PLAT X, ALET F, et al. Universal logarithmic corrections to entanglement entropies in two dimensions with spontaneously broken continuous symmetries[J/OL]. Phys. Rev. B, 2015, 91: 155145. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.155145>.
  - [127] KITAEV A, PRESKILL J. Topological Entanglement Entropy[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2006, 96(11): 110404[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.110404>.
  - [128] LEVIN M, WEN X G. Detecting Topological Order in a Ground State Wave Function[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2006, 96(11): 110405[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.110405>.
  - [129] LUNDGREN R, CHUA V, FIETE G A. Entanglement entropy and spectra of the one-dimensional Kugel-Khomskii model[J/OL]. Phys. Rev. B, 2012, 86(22): 224422[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.224422>.
  - [130] WOLF M M. Violation of the Entropic Area Law for Fermions[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2006, 96(1): 010404[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.010404>.
  - [131] LAFLORENCIE N. Scaling of entanglement entropy in the random singlet phase[J/OL]. Phys. Rev. B, 2005, 72(14): 140408[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.72.140408>.
  - [132] REFAEL G, MOORE J E. Entanglement Entropy of Random Quantum Critical Points in One Dimension[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2004, 93(26): 260602[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.260602>.
  - [133] FAGOTTI M, CALABRESE P, MOORE J E. Entanglement spectrum of random-singlet quantum critical points[J/OL]. Phys. Rev. B, 2011, 83(4): 045110[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.045110>.
  - [134] LIU H, SUH S J. Entanglement Tsunami: Universal Scaling in Holographic Thermalization [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2014, 112(1): 011601[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.011601>.
  - [135] D'ALESSIO L, KAFRI Y, POLKOVNIKOV A, et al. From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics[J/OL]. Advances in Physics, 2016, 65 (3): 239-362. <https://doi.org/10.1080/00018732.2016.1198134>.
  - [136] KAUFMAN A M, TAI M E, LUKIN A, et al. Quantum thermalization through entanglement in an isolated many-body system[J/OL]. Science, 2016, 353(6301): 794-800[2023-04-03]. <https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.aaf6725>.
  - [137] ABANIN D A, ALTMAN E, BLOCH I, et al. *Colloquium* : Many-body localization, thermalization, and entanglement[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2019, 91(2): 021001[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.021001>.
  - [138] PERES A. Separability criterion for density matrices[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1996, 77: 1413-1415. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.

- 
- [139] PLENIO M B. Logarithmic negativity: A full entanglement monotone that is not convex[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2005, 95: 090503. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.090503>.
  - [140] CHUNG M C, PESCHEL I. Density-matrix spectra of solvable fermionic systems[J/OL]. Phys. Rev. B, 2001, 64(6): 064412[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.64.064412>.
  - [141] PESCHEL I. Calculation of reduced density matrices from correlation functions[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(14): L205-L208. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/14/101>.
  - [142] PESCHEL I, EISLER V. Reduced density matrices and entanglement entropy in free lattice models[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(50): 504003. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504003>.
  - [143] GRAY R M, DAVISSON L D. The society for industrial and applied mathematics: Introduction to toeplitz and circulant matrices[M]. SIAM, 2006.
  - [144] JIN B Q, KOREPIN V E. Quantum Spin Chain, Toeplitz Determinants and the Fisher—Hartwig Conjecture[J/OL]. Journal of Statistical Physics, 2004, 116(1): 79-95. <https://doi.org/10.1023/B:JOSS.0000037230.37166.42>.
  - [145] BASOR E L, TRACY C A. The Fisher-Hartwig conjecture and generalizations[J/OL]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1991, 177(1): 167-173[2023-03-20]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378437191901497>. DOI: 10.1016/0378-4371(91)90149-7.
  - [146] LUTTINGER J M. An exactly soluble model of a many-fermion system[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 1963, 4(9): 1154-1162. <https://doi.org/10.1063/1.1704046>.
  - [147] COLEMAN S. Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model[J/OL]. Phys. Rev. D, 1975, 11(8): 2088-2097[2023-04-03]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.11.2088>.
  - [148] MATTIS D C. Theory of quasimagnetic impurity in a metal: An exactly soluble model of interacting electrons[J/OL]. Annals of Physics, 1975, 89(1): 45-67[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349167590295X>. DOI: 10.1016/0003-4916(75)90295-X.
  - [149] HALDANE F D M. 'luttinger liquid theory' of one-dimensional quantum fluids. i. properties of the luttinger model and their extension to the general 1d interacting spinless fermi gas[J/OL]. Journal of Physics C: Solid State Physics, 1981, 14(19): 2585. <https://dx.doi.org/10.1088/0022-3719/14/19/010>.
  - [150] EFETOV K B, LARKIN A I. Nonzero spin pairing in layer superconductors and in quasi-one-dimensional superconductors[J/OL]. Zh. Eksp. Teor. Fiz., v. 68, no. 1, pp. 155-163, 1975 [2023-04-03]. <https://www.osti.gov/biblio/4227502>.
  - [151] SÉNÉCHAL D. An Introduction to Bosonization[M/OL]//SÉNÉCHAL D, TREMBLAY A M, BOURBONNAIS C. CRM Series in Mathematical Physics: Theoretical Methods for Strongly Correlated Electrons. New York, NY: Springer, 2004: 139-186[2023-04-03]. [https://doi.org/10.1007/0-387-21717-7\\_4](https://doi.org/10.1007/0-387-21717-7_4).

- [152] TSVELIK A M. Cambridge monographs on mathematical physics: Bosonization of strongly correlated systems[M]. Cambridge University Press, 1998.
- [153] 易伟柱, 奚文杰, 陈伟强. 重整化平均场理论及其在铜氧化物高温超导材料中的应用[J]. 低温物理学报, 2020, 42(2): 59-67.
- [154] DI FRANCESCO P, MATHIEU P, SÉNÉCHAL D. Graduate texts in contemporary physics: Conformal field theory[M]. Springer, 1997.
- [155] BELAVIN A A, POLYAKOV A M, ZAMOLODCHIKOV A B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory[J/OL]. Nuclear Physics B, 1984, 241(2): 333-380 [2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138490052X>. DOI: 10.1016/0550-3213(84)90052-X.
- [156] CARDY J L. Conformal invariance and surface critical behavior[J/OL]. Nuclear Physics B, 1984, 240(4): 514-532[2023-04-03]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321384902414>. DOI: 10.1016/0550-3213(84)90241-4.
- [157] CARDY J L. Conformal invariance and universality in finite-size scaling[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1984, 17(7): L385. <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/17/7/003>.
- [158] CARDY J. Cambridge lecture notes in physics: Scaling and renormalization in statistical physics [M]. Cambridge University Press, 1996.
- [159] BAXTER R J. Exactly solved models in statistical mechanics[M]. Academic Press, 1982.
- [160] MUSSARDO G. Oxford graduate texts: Statistical field theory: An introduction to exactly solved models in statistical physics[M]. Oxford University Press, 2010.
- [161] POLCHINSKI J. String theory[M]. Cambridge University Press, 1998.
- [162] NIELSEN H, NINOMIYA M. A no-go theorem for regularizing chiral fermions[J/OL]. Physics Letters B, 1981, 105(2): 219 - 223. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381910261>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)91026-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)91026-1).
- [163] ADLER S L. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics[J/OL]. Phys. Rev., 1969, 177: 2426-2438. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.177.2426>.
- [164] BELL J S, JACKIW R W. A PCAC puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$ -model[J/OL]. Nuovo Cimento, 1969, 60(CERN-TH-920): 47-61. <http://cds.cern.ch/record/348417>. DOI: 10.1007/BF02823296.
- [165] ALVAREZ-GAUMÉ L, WITTEN E. Gravitational anomalies[J/OL]. Nuclear Physics B, 1984, 234(2): 269 - 330. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138490066X>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90066-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90066-X).
- [166] STONE M. Edge waves in the quantum hall effect[J/OL]. Annals of Physics, 1991, 207(1): 38 - 52. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349169190177A>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(91\)90177-A](https://doi.org/10.1016/0003-4916(91)90177-A).
- [167] WILSON K. Erice lecture notes, 1975[J]. Susskind, Lectures at Les Houches Summer School, 1976.
- [168] SUSSKIND L. Lattice fermions[J/OL]. Phys. Rev. D, 1977, 16: 3031-3039. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.3031>.

- 
- [169] DRELL S D, WEINSTEIN M, YANKIELOWICZ S. Strong-coupling field theory. i. variational approach to  $\varphi^4$  theory[J/OL]. Phys. Rev. D, 1976, 14: 487-516. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.487>.
  - [170] DEMARCO M, WEN X G. A single right-moving free fermion mode on an ultra-local 1 + 1 d spacetime lattice[A]. 2018.
  - [171] WANG J, WEN X G. Solution to the 1 + 1 dimensional gauged chiral fermion problem[J/OL]. Phys. Rev. D, 2019, 99: 111501. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.111501>.
  - [172] KIKUKAWA Y. Why is the mission impossible? Decoupling the mirror Ginsparg – Wilson fermions in the lattice models for two-dimensional Abelian chiral gauge theories[J/OL]. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2019, 2019(7). <https://doi.org/10.1093/ptep/ptz055>.
  - [173] WANG J, WEN X G. Non-perturbative regularization of 1+ 1d anomaly-free chiral fermions and bosons: On the equivalence of anomaly matching conditions and boundary gapping rules [A]. 2013.
  - [174] DEMARCO M, WEN X G. A novel non-perturbative lattice regularization of an anomaly-free 1 + 1d chiral  $su(2)$  gauge theory[A]. 2017.
  - [175] DEMARCO M A. Chiral phases on the lattice[A]. 2022.
  - [176] LEE J Y, AHN J, ZHOU H, et al. Topological correspondence between hermitian and non-hermitian systems: Anomalous dynamics[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123: 206404. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.206404>.
  - [177] LEE T E. Anomalous edge state in a non-hermitian lattice[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116: 133903. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.133903>.
  - [178] LEYKAM D, BLIOKH K Y, HUANG C, et al. Edge modes, degeneracies, and topological numbers in non-hermitian systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118: 040401. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.040401>.
  - [179] YAO S, WANG Z. Edge states and topological invariants of non-hermitian systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121: 086803. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.086803>.
  - [180] KAWABATA K, BESSHO T, SATO M. Classification of exceptional points and non-hermitian topological semimetals[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123: 066405. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.066405>.
  - [181] ZHANG X X, FRANZ M. Non-hermitian exceptional landau quantization in electric circuits [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124: 046401. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.046401>.
  - [182] BORGNIA D S, KRUCHKOV A J, SLAGER R J. Non-hermitian boundary modes and topology [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124: 056802. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.056802>.
  - [183] LONGHI S. Non-bloch-band collapse and chiral zener tunneling[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124: 066602. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.066602>.
  - [184] LEE T E, CHAN C K. Heralded magnetism in non-hermitian atomic systems[J/OL]. Phys. Rev. X, 2014, 4: 041001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.4.041001>.

- [185] PESKIN M E. An introduction to quantum field theory[M]. CRC press, 2018.
- [186] BERTLMANN R A. Anomalies in quantum field theory: volume 91[M]. Oxford university press, 2000.
- [187] FUJIKAWA K. Path-integral measure for gauge-invariant fermion theories[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1979, 42: 1195-1198. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1195>.
- [188] BLUMENHAGEN R, PLAUSCHINN E. Introduction to conformal field theory: with applications to string theory: volume 779[M]. Springer Science & Business Media, 2009.
- [189] KARSTEN L H. Lattice fermions in euclidean space-time[J/OL]. Physics Letters B, 1981, 104 (4): 315 - 319. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381901337>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)90133-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90133-7).
- [190] CHERNODUB M N. The nielsen–ninomiya theorem, pt-invariant non-hermiticity and single 8-shaped dirac cone[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2017, 50(38): 385001. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aa809a>.
- [191] BRODY D C. Biorthogonal quantum mechanics[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013, 47(3): 035305. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/3/035305>.
- [192] FRANCESCO P, MATHIEU P, SÉNÉCHAL D. Conformal field theory[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [193] GONG Z, ASHIDA Y, KAWABATA K, et al. Topological phases of non-hermitian systems [J/OL]. Phys. Rev. X, 2018, 8: 031079. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.031079>.
- [194] EZAWA M. Non-hermitian higher-order topological states in nonreciprocal and reciprocal systems with their electric-circuit realization[J/OL]. Phys. Rev. B, 2019, 99: 201411. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.201411>.
- [195] LIU S, MA S, YANG C, et al. Gain- and loss-induced topological insulating phase in a non-hermitian electrical circuit[J/OL]. Phys. Rev. Applied, 2020, 13: 014047. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.13.014047>.
- [196] KATO T. Perturbation theory for linear operators[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [197] BERRY M. Physics of Nonhermitian Degeneracies[J/OL]. Czechoslovak Journal of Physics, 2004, 54(10): 1039-1047. <https://doi.org/10.1023/B:CJOP.0000044002.05657.04>.
- [198] HEISS W D. Exceptional points of non-Hermitian operators[J/OL]. J. Phys. A: Math. Gen., 2004, 37(6): 2455-2464[2021-12-19]. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/6/034>.
- [199] ASHIDA Y, GONG Z, UEDA M. Non-hermitian physics[J/OL]. Advances in Physics, 2020, 69(3): 249-435. <https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991>.
- [200] HEISS W D. The physics of exceptional points[J/OL]. J. Phys. A: Math. Theor., 2012, 45(44): 444016[2021-10-20]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/45/44/444016>.
- [201] DING K, MA G, XIAO M, et al. Emergence, coalescence, and topological properties of multiple exceptional points and their experimental realization[J/OL]. Phys. Rev. X, 2016, 6: 021007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.021007>.

- 
- [202] WU Q, SOLUYANOV A A, BZDUŠEK T. Non-abelian band topology in noninteracting metals [J/OL]. *Science*, 2019, 365(6459): 1273-1277. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aau8740>.
  - [203] MIRI M A, ALÙ A. Exceptional points in optics and photonics[J/OL]. *Science*, 2019, 363(6422): eaar7709. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aar7709>.
  - [204] ÖZDEMİR K, ROTTER S, NORI F, et al. Parity-time symmetry and exceptional points in photonics[J/OL]. *Nat. Mater.*, 2019, 18(8): 783-798[2021-10-12]. <http://www.nature.com/articles/s41563-019-0304-9>. DOI: 10.1038/s41563-019-0304-9.
  - [205] KAWABATA K, SHIOZAKI K, UEDA M, et al. Symmetry and Topology in Non-Hermitian Physics[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2019, 9(4): 041015[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.041015>.
  - [206] LAI Y H, LU Y K, SUH M G, et al. Observation of the exceptional-point-enhanced Sagnac effect[J/OL]. *Nature*, 2019, 576(7785): 65-69. <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1777-z>.
  - [207] KAWABATA K, ASHIDA Y, UEDA M. Information Retrieval and Criticality in Parity-Time-Symmetric Systems[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 119(19): 190401[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.190401>.
  - [208] DÓRA B, HEYL M, MOESSNER R. The Kibble-Zurek mechanism at exceptional points[J/OL]. *Nat Commun*, 2019, 10(1): 2254[2021-10-21]. <http://www.nature.com/articles/s41467-019-10048-9>. DOI: 10.1038/s41467-019-10048-9.
  - [209] LIAO Q, LEBLANC C, REN J, et al. Experimental Measurement of the Divergent Quantum Metric of an Exceptional Point[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127(10): 107402[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.107402>.
  - [210] HU H, ZHAO E. Knots and non-hermitian bloch bands[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 126: 010401. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.010401>.
  - [211] YANG Z, CHIU C K, FANG C, et al. Jones polynomial and knot transitions in hermitian and non-hermitian topological semimetals[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124: 186402. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.186402>.
  - [212] TANG W, JIANG X, DING K, et al. Exceptional nexus with a hybrid topological invariant [J/OL]. *Science*, 2020, 370(6520): 1077-1080. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.abd8872>.
  - [213] ZHANG G Q, CHEN Z, XU D, et al. Exceptional point and cross-relaxation effect in a hybrid quantum system[J/OL]. *PRX Quantum*, 2021, 2: 020307. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.2.020307>.
  - [214] GAO T, ESTRECHO E, BLIOKH K Y, et al. Observation of non-Hermitian degeneracies in a chaotic exciton-polariton billiard[J/OL]. *Nature*, 2015, 526(7574): 554-558[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/nature15522>. DOI: 10.1038/nature15522.
  - [215] HEISS D. Circling exceptional points[J/OL]. *Nature Phys*, 2016, 12(9): 823-824[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/nphys3864>. DOI: 10.1038/nphys3864.
  - [216] HEISS W D, MÜLLER M, ROTTER I. Collectivity, phase transitions, and exceptional points in open quantum systems[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 1998, 58(3): 2894-2901[2021-12-19]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.58.2894>.

- 
- [217] DOPPLER J, MAILYBAEV A A, BÖHM J, et al. Dynamically encircling an exceptional point for asymmetric mode switching[J/OL]. *Nature*, 2016, 537(7618): 76-79[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/nature18605>. DOI: 10.1038/nature18605.
  - [218] HASSAN A U, ZHEN B, SOLJAČIĆ M, et al. Dynamically Encircling Exceptional Points: Exact Evolution and Polarization State Conversion[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 118(9): 093002 [2021-12-19]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.093002>.
  - [219] DEMBOWSKI C, GRÄF H D, HARNEY H L, et al. Experimental observation of the topological structure of exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 86: 787-790. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.787>.
  - [220] LI A, DONG J, WANG J, et al. Hamiltonian hopping for efficient chiral mode switching in encircling exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 125: 187403. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.187403>.
  - [221] MILBURN T J, DOPPLER J, HOLMES C A, et al. General description of quadiabatic dynamical phenomena near exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. A*, 2015, 92: 052124. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.052124>.
  - [222] YU F, ZHANG X L, TIAN Z N, et al. General rules governing the dynamical encircling of an arbitrary number of exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127: 253901. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.253901>.
  - [223] LIU Q, LI S, WANG B, et al. Efficient mode transfer on a compact silicon chip by encircling moving exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124: 153903. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.153903>.
  - [224] KLAIMAN S, GÜNTHER U, MOISEYEV N. Visualization of Branch Points in P T -Symmetric Waveguides[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101(8): 080402[2021-12-19]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.080402>.
  - [225] ZHEN B, HSU C W, IGARASHI Y, et al. Spawning rings of exceptional points out of Dirac cones[J/OL]. *Nature*, 2015, 525(7569): 354-358[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/nature14889>. DOI: 10.1038/nature14889.
  - [226] CERJAN A, RAMAN A, FAN S. Exceptional Contours and Band Structure Design in Parity-Time Symmetric Photonic Crystals[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 116(20): 203902[2021-12-19]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.203902>.
  - [227] LONGHI S. Spectral singularities and Bragg scattering in complex crystals[J/OL]. *Phys. Rev. A*, 2010, 81(2): 022102[2021-12-19]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.022102>.
  - [228] FENG L, WONG Z J, MA R M, et al. Single-mode laser by parity-time symmetry breaking [J/OL]. *Science*, 2014, 346(6212): 972-975. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1258479>.
  - [229] PENG B, ÖZDEMİR K, ROTTER S, et al. Loss-induced suppression and revival of lasing [J/OL]. *Science*, 2014, 346(6207): 328-332. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1258004>.
  - [230] LIU W, WU Y, DUAN C K, et al. Dynamically encircling an exceptional point in a real quantum system[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 126: 170506. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.170506>.

- 
- [231] DING L, SHI K, ZHANG Q, et al. Experimental determination of  $\mathcal{PT}$ -symmetric exceptional points in a single trapped ion[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 126: 083604. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.083604>.
  - [232] NAGHILOO M, ABBASI M, JOGLEKAR Y N, et al. Quantum state tomography across the exceptional point in a single dissipative qubit[J/OL]. Nat. Phys., 2019, 15(12): 1232-1236[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/s41567-019-0652-z>. DOI: 10.1038/s41567-019-0652-z.
  - [233] ASHIDA Y, UEDA M. Full-Counting Many-Particle Dynamics: Nonlocal and Chiral Propagation of Correlations[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 120(18): 185301[2021-12-19]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.185301>.
  - [234] DEMBOWSKI C, DIETZ B, GRÄF H D, et al. Encircling an exceptional point[J/OL]. Phys. Rev. E, 2004, 69: 056216. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.69.056216>.
  - [235] WONG Z J, XU Y L, KIM J, et al. Lasing and anti-lasing in a single cavity[J/OL]. Nature Photon, 2016, 10(12): 796-801[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/nphoton.2016.216>. DOI: 10.1038/nphoton.2016.216.
  - [236] HASSANI GANGARAJ S A, MONTICONE F. Topological Waveguiding near an Exceptional Point: Defect-Immune, Slow-Light, and Loss-Immune Propagation[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(9): 093901[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.093901>.
  - [237] CHEN W, KAYA ÖZDEMİR Ş, ZHAO G, et al. Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity[J/OL]. Nature, 2017, 548(7666): 192-196. <https://doi.org/10.1038/nature23281>.
  - [238] HODAEI H, HASSAN A U, WITTEK S, et al. Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points[J/OL]. Nature, 2017, 548(7666): 187-191[2021-12-19]. <https://www.nature.com/articles/nature23280>. DOI: 10.1038/nature23280.
  - [239] ZHANG M, SWEENEY W, HSU C W, et al. Quantum noise theory of exceptional point amplifying sensors[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123: 180501. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.180501>.
  - [240] XU Y, WANG S T, DUAN L M. Weyl Exceptional Rings in a Three-Dimensional Dissipative Cold Atomic Gas[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118(4): 045701[2021-12-19]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.045701>.
  - [241] TANG W, DING K, MA G. Direct measurement of topological properties of an exceptional parabola[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 127: 034301. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.034301>.
  - [242] DING K, MA G, ZHANG Z Q, et al. Experimental demonstration of an anisotropic exceptional point[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121: 085702. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.085702>.
  - [243] VIDAL G, LATORRE J I, RICO E, et al. Entanglement in Quantum Critical Phenomena[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2003, 90(22): 227902[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.227902>.
  - [244] CALABRESE P, CARDY J. Entanglement entropy and quantum field theory[J/OL]. J. Stat. Mech.: Theor. Exp., 2004, 2004(06): P06002[2021-10-20]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/2004/06/P06002>.

- 
- [245] CALABRESE P, CARDY J. Entanglement entropy and conformal field theory[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(50): 504005. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504005>.
  - [246] HERVIOU L, REGNAULT N, BARDARSON J H. Entanglement spectrum and symmetries in non-Hermitian fermionic non-interacting models[J/OL]. SciPost Phys., 2019, 7(5): 069[2021-10-12]. <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.7.5.069>.
  - [247] GUO Y B, YU Y C, HUANG R Z, et al. Entanglement entropy of non-Hermitian free fermions [J/OL]. J. Phys.: Condens. Matter, 2021, 33(47): 475502[2021-10-12]. <https://doi.org/10.1088/1361-648x/ac216e>. DOI: 10.1088/1361-648X/ac216e.
  - [248] BIANCHINI D, CASTRO-ALVAREDO O, DOYON B, et al. Entanglement entropy of non-unitary conformal field theory[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2014, 48(4): 04FT01. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/4/04ft01>.
  - [249] LOOTENS L, VANHOVE R, HAEGEMAN J, et al. Galois Conjugated Tensor Fusion Categories and Nonunitary Conformal Field Theory[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(12): 120601 [2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.120601>.
  - [250] COUVREUR R, JACOBSEN J L, SALEUR H. Entanglement in Nonunitary Quantum Critical Spin Chains[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 119(4): 040601[2021-10-18]. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.040601>.
  - [251] XU W T, SCHUCH N. Characterization of topological phase transitions from a non-Abelian topological state and its Galois conjugate through condensation and confinement order parameters[J/OL]. Phys. Rev. B, 2021, 104(15): 155119[2021-10-14]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.155119>.
  - [252] BIANCHINI D, RAVANINI F. Entanglement entropy from corner transfer matrix in forrester–baxter non-unitary RSOS models[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2016, 49(15): 154005. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/15/154005>.
  - [253] CHANG P Y, YOU J S, WEN X, et al. Entanglement spectrum and entropy in topological non-Hermitian systems and nonunitary conformal field theory[J/OL]. Phys. Rev. Research, 2020, 2 (3): 033069[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.033069>.
  - [254] CHEN C Y, LAO B X, YU X Y, et al. Galois conjugates of String-net Model[A/OL]. 2021 [2021-12-20]. <http://arxiv.org/abs/2108.05730>.
  - [255] YARKONY D R. Diabolical conical intersections[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 1996, 68: 985-1013. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.68.985>.
  - [256] KAUSCH H G. Curiosities at  $c=-2$ [A/OL]. 1995[2021-10-11]. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9510149v1>.
  - [257] SCAFFIDI T, PARKER D E, VASSEUR R. Gapless symmetry-protected topological order [J/OL]. Phys. Rev. X, 2017, 7: 041048. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.041048>.
  - [258] VERRESEN R, THORNGREN R, JONES N G, et al. Gapless topological phases and symmetry-enriched quantum criticality[J/OL]. Phys. Rev. X, 2021, 11: 041059. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.041059>.

- 
- [259] YIN C, JIANG H, LI L, et al. Geometrical meaning of winding number and its characterization of topological phases in one-dimensional chiral non-hermitian systems[J/OL]. Phys. Rev. A, 2018, 97: 052115. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.97.052115>.
  - [260] AROUCA R, LEE C H, MORAIS SMITH C. Unconventional scaling at non-Hermitian critical points[J/OL]. Phys. Rev. B, 2020, 102(24): 245145[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.245145>.
  - [261] FRUCHART M, HANAI R, LITTLEWOOD P B, et al. Non-reciprocal phase transitions[J/OL]. Nature, 2021, 592(7854): 363-369[2022-02-08]. <https://www.nature.com/articles/s41586-021-03375-9>. DOI: 10.1038/s41586-021-03375-9.
  - [262] BENINI F, IOSSA C, SERONE M. Conformality Loss, Walking, and 4D Complex Conformal Field Theories at Weak Coupling[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(5): 051602[2021-10-11]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.051602>.
  - [263] GORBENKO V, RYCHKOV S, ZAN B. Walking, weak first-order transitions, and complex CFTs[J/OL]. J. High Energ. Phys., 2018, 2018(10): 108[2021-10-10]. [https://link.springer.com/10.1007/JHEP10\(2018\)108](https://link.springer.com/10.1007/JHEP10(2018)108).
  - [264] KAPLAN D B, LEE J W, SON D T, et al. Conformality lost[J/OL]. Phys. Rev. D, 2009, 80(12): 125005[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.125005>.
  - [265] MA H, HE Y C. Shadow of complex fixed point: Approximate conformality of  $Q > 4$  Potts model[J/OL]. Phys. Rev. B, 2019, 99(19): 195130[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.195130>.
  - [266] MICHISHITA Y, PETERS R. Equivalence of Effective Non-Hermitian Hamiltonians in the Context of Open Quantum Systems and Strongly Correlated Electron Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(19): 196401[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.196401>.
  - [267] CHEN W Q, WU Y S, XI W, et al. Fate of quantum anomalies for 1d lattice chiral fermion with a simple non-hermitian hamiltonian[A]. 2023. arXiv: 2010.09375.
  - [268] ZHANG C, LEVIN M. Exactly Solvable Model for a Deconfined Quantum Critical Point in 1D [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2023, 130(2): 026801[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.026801>.
  - [269] HUSE D A, FISHER M E. Commensurate melting, domain walls, and dislocations[J/OL]. Phys. Rev. B, 1984, 29(1): 239-270[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.29.239>.
  - [270] NYCKEES S, MILA F. Commensurate-incommensurate transition in the chiral ashkin-teller model[J/OL]. Phys. Rev. Res., 2022, 4: 013093. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevRes.4.013093>.
  - [271] WHITSITT S, SAMAJDAR R, SACHDEV S. Quantum field theory for the chiral clock transition in one spatial dimension[J/OL]. Phys. Rev. B, 2018, 98: 205118. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.205118>.
  - [272] SENTHIL T, VISHWANATH A, BALENTS L, et al. Deconfined Quantum Critical Points [J/OL]. Science, 2004, 303(5663): 1490-1494[2023-03-20]. <https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.1091806>.

- 
- [273] JIANG S, MOTRUNICH O. Ising ferromagnet to valence bond solid transition in a one-dimensional spin chain: Analogies to deconfined quantum critical points[J/OL]. Phys. Rev. B, 2019, 99(7): 075103[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.075103>.
  - [274] WANG C, NAHUM A, METLITSKI M A, et al. Deconfined Quantum Critical Points: Symmetries and Dualities[J/OL]. Phys. Rev. X, 2017, 7(3): 031051[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.031051>.
  - [275] ROBERTS B, JIANG S, MOTRUNICH O I. Deconfined quantum critical point in one dimension[J/OL]. Phys. Rev. B, 2019, 99(16): 165143[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.165143>.
  - [276] HUANG R Z, LU D C, YOU Y Z, et al. Emergent symmetry and conserved current at a one-dimensional incarnation of deconfined quantum critical point[J/OL]. Phys. Rev. B, 2019, 100(12): 125137[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.125137>.
  - [277] LIU W Y, HASIK J, GONG S S, et al. Emergence of Gapless Quantum Spin Liquid from Deconfined Quantum Critical Point[J/OL]. Phys. Rev. X, 2022, 12(3): 031039[2023-03-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.12.031039>.
  - [278] YI W Z, LIN H J, LIN Z X, et al. Temporal evolution of one-dimensional fermion liquid with particle loss[A/OL]. 2021[2022-01-04]. <http://arxiv.org/abs/2112.13550>.
  - [279] TURNER A M, POLLMANN F, BERG E. Topological phases of one-dimensional fermions: An entanglement point of view[J/OL]. Phys. Rev. B, 2011, 83: 075102. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.075102>.
  - [280] TURNER A M, ZHANG Y, VISHWANATH A. Band Topology of Insulators via the Entanglement Spectrum[A/OL]. 2010[2021-12-19]. <http://arxiv.org/abs/0909.3119>.
  - [281] FIDKOWSKI L. Entanglement Spectrum of Topological Insulators and Superconductors[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2010, 104(13): 130502[2021-12-15]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.130502>.
  - [282] WYBO E, POLLMANN F, SONNDRHI S L, et al. Visualizing quasiparticles from quantum entanglement for general one-dimensional phases[J/OL]. Phys. Rev. B, 2021, 103(11): 115120 [2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.115120>.
  - [283] LEE C H. Exceptional bound states and negative entanglement entropy[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2022, 128: 010402. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.010402>.
  - [284] GEHLEN G V. Critical and off-critical conformal analysis of the Ising quantum chain in an imaginary field[J/OL]. J. Phys. A: Math. Gen., 1991, 24(22): 5371-5399[2021-12-15]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/24/22/021>.
  - [285] GEHLEN G V. Non-hermitian tricriticality in the blume?capel model with imaginary field [M/OL]//Perspectives on Solvable Models. WORLD SCIENTIFIC, 1995: 59-81[2021-12-15]. [https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812831279\\_0006](https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812831279_0006).
  - [286] KORFF C. PTsymmetry of the non-Hermitian XX spin-chain: non-local bulk interaction from complex boundary fields[J/OL]. J. Phys. A: Math. Theor., 2008, 41(29): 295206[2021-12-15]. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/29/295206>.

- [287] CARLSTRÖM J, STÅLHAMMAR M, BUDICH J C, et al. Knotted non-hermitian metals [J/OL]. Phys. Rev. B, 2019, 99: 161115. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.161115>.
- [288] ASHIDA Y, FURUKAWA S, UEDA M. Parity-time-symmetric quantum critical phenomena [J/OL]. Nat Commun, 2017, 8(1): 15791[2021-10-12]. <http://www.nature.com/articles/ncomms15791>. DOI: 10.1038/ncomms15791.
- [289] LI L, LEE C H, GONG J. Topological Switch for Non-Hermitian Skin Effect in Cold-Atom Systems with Loss[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(25): 250402[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.250402>.
- [290] PAN L, CHEN X, CHEN Y, et al. Non-Hermitian linear response theory[J/OL]. Nat. Phys., 2020, 16(7): 767-771[2021-10-12]. <http://www.nature.com/articles/s41567-020-0889-6>. DOI: 10.1038/s41567-020-0889-6.
- [291] ALTLAND A, FLEISCHHAUER M, DIEHL S. Symmetry Classes of Open Fermionic Quantum Matter[J/OL]. Phys. Rev. X, 2021, 11(2): 021037[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.021037>.
- [292] LIEU S, MCGINLEY M, COOPER N R. Tenfold Way for Quadratic Lindbladians[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(4): 040401[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.040401>.
- [293] YU L W, DENG D L. Unsupervised Learning of Non-Hermitian Topological Phases[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 126(24): 240402[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.240402>.
- [294] GONG Z, ASHIDA Y, KAWABATA K, et al. Topological Phases of Non-Hermitian Systems [J/OL]. Phys. Rev. X, 2018, 8(3): 031079[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.031079>.
- [295] HARARI G, BANDRES M A, LUMER Y, et al. Topological insulator laser: Theory[J/OL]. Science, 2018, 359(6381): eaar4003[2021-10-12]. <https://www.science.org/doi/10.1126/science.aar4003>.
- [296] HATANO N, NELSON D R. Localization transitions in non-hermitian quantum mechanics [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1996, 77: 570-573. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.570>.
- [297] WANG X R, GUO C X, KOU S P. Defective edge states and number-anomalous bulk-boundary correspondence in non-hermitian topological systems[J/OL]. Phys. Rev. B, 2020, 101: 121116. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.101.121116>.
- [298] HU B, ZHANG Z, ZHANG H, et al. Non-Hermitian topological whispering gallery[J/OL]. Nature, 2021, 597(7878): 655-659[2021-10-20]. <https://www.nature.com/articles/s41586-021-03833-4>. DOI: 10.1038/s41586-021-03833-4.
- [299] WANG K, DUTT A, WOJCIK C C, et al. Topological complex-energy braiding of non-hermitian bands[J/OL]. Nature, 2021, 598(7879): 59-64. <https://www.nature.com/articles/s41586-021-03848-x>.
- [300] BANDRES M A, WITTEK S, HARARI G, et al. Topological insulator laser: Experiments [J/OL]. Science, 2018, 359(6381): eaar4005[2021-10-12]. <https://www.science.org/doi/10.1126/science.aar4005>.

- 
- [301] XIAO L, DENG T, WANG K, et al. Non-Hermitian bulk–boundary correspondence in quantum dynamics[J/OL]. *Nat. Phys.*, 2020, 16(7): 761-766[2021-10-12]. <http://www.nature.com/articles/s41567-020-0836-6>. DOI: 10.1038/s41567-020-0836-6.
  - [302] ZHAO H, QIAO X, WU T, et al. Non-Hermitian topological light steering[J/OL]. *Science*, 2019, 365(6458): 1163-1166[2021-10-12]. <https://www.science.org/doi/10.1126/science.aay1064>.
  - [303] ZHANG W, OUYANG X, HUANG X, et al. Observation of Non-Hermitian Topology with Nonunitary Dynamics of Solid-State Spins[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127(9): 090501[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.090501>.
  - [304] CHEN W, ABBASI M, JOGLEKAR Y N, et al. Quantum Jumps in the Non-Hermitian Dynamics of a Superconducting Qubit[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127(14): 140504[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.140504>.
  - [305] OZAWA T, PRICE H M, AMO A, et al. Topological photonics[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2019, 91(1): 015006[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.015006>.
  - [306] LI L, LEE C H, MU S, et al. Critical non-Hermitian skin effect[J/OL]. *Nat Commun*, 2020, 11(1): 5491[2021-10-12]. <http://www.nature.com/articles/s41467-020-18917-4>. DOI: 10.1038/s41467-020-18917-4.
  - [307] SUN X Q, ZHU P, HUGHES T L. Geometric Response and Disclination-Induced Skin Effects in Non-Hermitian Systems[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127(6): 066401[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066401>.
  - [308] LEE C H, LI L, GONG J. Hybrid Higher-Order Skin-Topological Modes in Nonreciprocal Systems[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123(1): 016805[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.016805>.
  - [309] MARTINEZ ALVAREZ V M, BARRIOS VARGAS J E, FOA TORRES L E F. Non-Hermitian robust edge states in one dimension: Anomalous localization and eigenspace condensation at exceptional points[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 2018, 97(12): 121401[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.97.121401>.
  - [310] OKUMA N, KAWABATA K, SHIOZAKI K, et al. Topological origin of non-hermitian skin effects[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124: 086801. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.086801>.
  - [311] YIN S, HUANG G Y, LO C Y, et al. Kibble-Zurek Scaling in the Yang-Lee Edge Singularity [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 118(6): 065701[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.065701>.
  - [312] ZEUNER J M, RECHTSMAN M C, PLOTNIK Y, et al. Observation of a Topological Transition in the Bulk of a Non-Hermitian System[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 115(4): 040402[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.040402>.
  - [313] GE L, STONE A D. Parity-Time Symmetry Breaking beyond One Dimension: The Role of Degeneracy[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2014, 4(3): 031011[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.4.031011>.
  - [314] ASHIDA Y, FURUKAWA S, UEDA M. Quantum critical behavior influenced by measurement backaction in ultracold gases[J/OL]. *Phys. Rev. A*, 2016, 94(5): 053615[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.053615>.

- 
- [315] LONGHI S. Topological Phase Transition in non-Hermitian Quasicrystals[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 122(23): 237601[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.237601>.
  - [316] OKUMA N, SATO M. Topological Phase Transition Driven by Infinitesimal Instability: Majorana Fermions in Non-Hermitian Spintronics[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(9): 097701 [2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.097701>.
  - [317] MIRI M A, ALÙ A. Exceptional points in optics and photonics[J/OL]. Science, 2019, 363 (6422): eaar7709. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aar7709>.
  - [318] DENNER M M, SKURATIVSKA A, SCHINDLER F, et al. Exceptional topological insulators [J/OL]. Nat Commun, 2021, 12(1): 5681[2021-10-10]. <https://www.nature.com/articles/s41467-021-25947-z>. DOI: 10.1038/s41467-021-25947-z.
  - [319] MOLINA R A, GONZÁLEZ J. Surface and 3D Quantum Hall Effects from Engineering of Exceptional Points in Nodal-Line Semimetals[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 120(14): 146601 [2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.146601>.
  - [320] YOKOMIZO K, MURAKAMI S. Non-Bloch Band Theory of Non-Hermitian Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(6): 066404[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.066404>.
  - [321] MCDONALD A, PEREG-BARNEA T, CLERK A. Phase-Dependent Chiral Transport and Effective Non-Hermitian Dynamics in a Bosonic Kitaev-Majorana Chain[J/OL]. Phys. Rev. X, 2018, 8(4): 041031[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.041031>.
  - [322] RUDNER M S, LEVITOV L S. Topological Transition in a Non-Hermitian Quantum Walk [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2009, 102(6): 065703[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.065703>.
  - [323] LEE J Y, AHN J, ZHOU H, et al. Topological Correspondence between Hermitian and Non-Hermitian Systems: Anomalous Dynamics[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(20): 206404 [2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.206404>.
  - [324] SHEN H, ZHEN B, FU L. Topological Band Theory for Non-Hermitian Hamiltonians[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 120(14): 146402[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.146402>.
  - [325] GORINI V, KOSSAKOWSKI A, SUDARSHAN E C G. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems[J/OL]. J. Math. Phys., 1976, 17(5): 821-825[2021-10-20]. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.522979>.
  - [326] AMICO L, FAZIO R, OSTERLOH A, et al. Entanglement in many-body systems[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2008, 80: 517-576. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.517>.
  - [327] BRANDÃO F G S L, HORODECKI M. An area law for entanglement from exponential decay of correlations[J/OL]. Nature Phys, 2013, 9(11): 721-726[2021-10-20]. <https://www.nature.com/articles/nphys2747>. DOI: 10.1038/nphys2747.
  - [328] DÓRA B, HAQUE M, ZARÁND G. Crossover from adiabatic to sudden interaction quench in a luttinger liquid[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2011, 106: 156406. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.156406>.

- 
- [329] CAZALILLA M A. Effect of Suddenly Turning on Interactions in the Luttinger Model[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2006, 97(15): 156403[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.156403>.
  - [330] FAGOTTIM, CALABRESE P. Evolution of entanglement entropy following a quantum quench: Analytic results for the X Y chain in a transverse magnetic field[J/OL]. Phys. Rev. A, 2008, 78 (1): 010306[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.010306>.
  - [331] CALABRESE P, CARDY J. Time Dependence of Correlation Functions Following a Quantum Quench[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2006, 96(13): 136801[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.136801>.
  - [332] BARDARSON J H, POLLMANN F, MOORE J E. Unbounded Growth of Entanglement in Models of Many-Body Localization[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2012, 109(1): 017202[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.017202>.
  - [333] SERBYN M, PAPIĆ Z, ABANIN D A. Universal Slow Growth of Entanglement in Interacting Strongly Disordered Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2013, 110(26): 260601[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.260601>.
  - [334] MOCA C U U U P M C, DÓRA B. Universal conductance of a  $\mathcal{PT}$ -symmetric luttinger liquid after a quantum quench[J/OL]. Phys. Rev. B, 2021, 104: 125124. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.125124>.
  - [335] DÓRA B, MOCA C U U U P M C. Quantum quench in  $\mathcal{PT}$ -symmetric luttinger liquid[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124: 136802. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.136802>.
  - [336] BÁCSI A, MOCA C U U U P M C, DÓRA B. Dissipation-induced luttinger liquid correlations in a one-dimensional fermi gas[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124: 136401. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.136401>.
  - [337] BÁCSI A, DÓRA B. Dynamics of entanglement after exceptional quantum quench[J/OL]. Phys. Rev. B, 2021, 103: 085137. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.085137>.
  - [338] CAROLLO F, ALBA V. Emergent dissipative quasi-particle picture in noninteracting Markovian open quantum systems[A/OL]. 2021[2021-10-12]. <http://arxiv.org/abs/2106.11997>.
  - [339] BÁCSI A, MOCA C U U U P M C, ZARÁND G, et al. Vaporization dynamics of a dissipative quantum liquid[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 125: 266803. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.266803>.
  - [340] ALBERTON O, BUCHHOLD M, DIEHL S. Entanglement Transition in a Monitored Free-Fermion Chain: From Extended Criticality to Area Law[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 126 (17): 170602[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.170602>.
  - [341] PTASZYŃSKI K, ESPOSITO M. Entropy Production in Open Systems: The Predominant Role of Intraenvironment Correlations[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(20): 200603[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.200603>.
  - [342] OKUMA N, SATO M. Quantum anomaly, non-Hermitian skin effects, and entanglement entropy in open systems[J/OL]. Phys. Rev. B, 2021, 103(8): 085428[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.085428>.

- 
- [343] ALBA V, CAROLLO F. Spreading of correlations in Markovian open quantum systems[J/OL]. Phys. Rev. B, 2021, 103(2): L020302[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.L020302>.
  - [344] ASHIDA Y, SAITO K, UEDA M. Thermalization and Heating Dynamics in Open Generic Many-Body Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(17): 170402[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.170402>.
  - [345] LI Y, CHEN X, FISHER M P A. Quantum zeno effect and the many-body entanglement transition[J/OL]. Phys. Rev. B, 2018, 98: 205136. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.205136>.
  - [346] BENSA J, ŽNIDARIČ M. Fastest Local Entanglement Scrambler, Multistage Thermalization, and a Non-Hermitian Phantom[J/OL]. Phys. Rev. X, 2021, 11(3): 031019[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.031019>.
  - [347] NAHUM A, ROY S, SKINNER B, et al. Measurement and Entanglement Phase Transitions in All-To-All Quantum Circuits, on Quantum Trees, and in Landau-Ginsburg Theory[J/OL]. PRX Quantum, 2021, 2(1): 010352[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.2.010352>.
  - [348] SKINNER B, RUHMAN J, NAHUM A. Measurement-Induced Phase Transitions in the Dynamics of Entanglement[J/OL]. Phys. Rev. X, 2019, 9(3): 031009[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.031009>.
  - [349] APOLLARO T J G, PALMA G M, MARINO J. Entanglement entropy in a periodically driven quantum Ising ring[J/OL]. Phys. Rev. B, 2016, 94(13): 134304[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.94.134304>.
  - [350] MASKARA N, MICHAELIDIS A, HO W, et al. Discrete Time-Crystalline Order Enabled by Quantum Many-Body Scars: Entanglement Steering via Periodic Driving[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 127(9): 090602[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.090602>.
  - [351] BERDANIER W, KOLODRUBETZ M, VASSEUR R, et al. Floquet Dynamics of Boundary-Driven Systems at Criticality[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118(26): 260602[2021-10-20]. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.260602>.
  - [352] PONTE P, PAPIĆ Z, HUVEENEERS F, et al. Many-Body Localization in Periodically Driven Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2015, 114(14): 140401[2021-10-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.140401>.
  - [353] ALBA V, CAROLLO F. Noninteracting fermionic systems with localized dissipation: Exact results in the hydrodynamic limit[A/OL]. 2021[2021-10-12]. <http://arxiv.org/abs/2103.05671>.
  - [354] CALABRESE P. Entanglement and thermodynamics in non-equilibrium isolated quantum systems[J/OL]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2018, 504: 31-44 [2021-10-20]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843711731018X>. DOI: 10.1016/j.physa.2017.10.011.
  - [355] PROSEN T. Third quantization: a general method to solve master equations for quadratic open fermi systems[J/OL]. New Journal of Physics, 2008, 10(4): 043026. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/10/4/043026>.

- 
- [356] CAI Z, BARTHEL T. Algebraic versus Exponential Decoherence in Dissipative Many-Particle Systems[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2013, 111(15): 150403[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.150403>.
  - [357] HILL S, WOOTTERS W K. Entanglement of a Pair of Quantum Bits[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(26): 5022-5025[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5022>.
  - [358] WOOTTERS W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 2245-2248. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
  - [359] CHEN L M, CHEN S A, YE P. Entanglement, non-hermiticity, and duality[J/OL]. SciPost Physics, 2021, 11(1): 003[2021-10-20]. <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.11.1.003>.
  - [360] MAITY S, BANDYOPADHYAY S, BHATTACHARJEE S, et al. Growth of mutual information in a quenched one-dimensional open quantum many-body system[J/OL]. Phys. Rev. B, 2020, 101(18): 180301[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.101.180301>.
  - [361] SHARMA A, RABANI E. Landauer current and mutual information[J/OL]. Phys. Rev. B, 2015, 91(8): 085121[2021-10-12]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.085121>.
  - [362] BRODY D C. Biorthogonal quantum mechanics[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013, 47(3): 035305. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/3/035305>.
  - [363] HOLZHEY C, LARSEN F, WILCZEK F. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory[J/OL]. Nuclear Physics B, 1994, 424(3): 443-467[2021-10-20]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321394904022>. DOI: 10.1016/0550-3213(94)90402-2.
  - [364] CALABRESE P, CARDY J. Entanglement entropy and conformal field theory[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(50): 504005. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504005>.
  - [365] ZHOU Y, ZHANG Z, YIN Z, et al. Rapid and Unconditional Parametric Reset Protocol for Tunable Superconducting Qubits[A/OL]. 2021[2021-10-20]. <http://arxiv.org/abs/2103.11315>.
  - [366] ABANIN D A, DEMLER E. Measuring Entanglement Entropy of a Generic Many-Body System with a Quantum Switch[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2012, 109(2): 020504[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.020504>.
  - [367] DALEY A J, PICHLER H, SCHACHENMAYER J, et al. Measuring Entanglement Growth in Quench Dynamics of Bosons in an Optical Lattice[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2012, 109(2): 020505[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.020505>.
  - [368] CHOO K, VON KEYSERLINGK C W, REGNAULT N, et al. Measurement of the Entanglement Spectrum of a Symmetry-Protected Topological State Using the IBM Quantum Computer [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(8): 086808[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.086808>.
  - [369] DALMONTE M, VERMERSCH B, ZOLLER P. Quantum simulation and spectroscopy of entanglement Hamiltonians[J/OL]. Nature Physics, 2018, 14(8): 827-831. <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0151-7>.
  - [370] VARMA A V, DAS S. Simulating many-body non-Hermitian PT -symmetric spin dynamics [J/OL]. Phys. Rev. B, 2021, 104(3): 035153[2021-10-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.035153>.

## 致 谢

感谢我的父母对我多年来的养育。衷心感谢导师陈伟强副教授以及美国犹他大学吴咏时教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

感谢我的合作者们（排名不分先后）：美国德克萨斯大学奥斯汀分校林泽勋博士（现为美国加州大学洛杉矶分校博士后）、南京大学物理学院王锐副教授、博士生肖荣同学、浙江西湖高等研究院研究员李华博士、美国科罗拉多大学伯德分校博士生海咏菊同学、南方科技大学物理系博士生林浩杰同学、香港大学博士生奚文杰同学、香港中文大学博士生岳亘同学等。跟他们的讨论和合作使我在科研工作上有很大进步。

本课题承蒙下列基金（单位）资助（排名不分先后）：国家自然科学基金 (No. 11861161001), 深圳市科技创新委员 (No. ZDSYS20190902092905285), 广东省基础与应用基础研究基金联合基金 (No. 2020B1515120100), 深港科技创新合作区 (No.HZQB-KCZYB-2020050), 南方科技大学科学与工程计算中心，特此致谢。

## 个人简历、在学期间完成的相关学术成果

### 个人简历

1995 年 10 月 2 日出生于湖南省邵阳市隆回县。

2013 年 8 月考入南京大学物理学院物理学专业，2017 年 7 月本科毕业并获得物理学学士学位。

2020 年 9 月——2023 年 7 月，在南方科技大学理学院物理系凝聚态物理方向学习。

相关科研经历：

07.2015-08.2015 中科院高能物理研究所 暑期实习

01.2016-12.2017 南京大学人工微结构国家实验室 科研助理

03.2017-05.2017 香港大学物理系 科研助理

03.2018-09.2018, 10.2019-07.2020 南方科技大学物理系 科研助理

12.2018-09.2019 西湖大学理学院 科研助理

### 在学期间完成的相关学术成果

#### 学术论文

[1]Wei-Zhu Yi, Hao-Jie Lin, Ze-Xun Lin and Wei-Qiang Chen\*<sup>①</sup>, Temporal evolution of one-dimensional fermion liquid with particle loss. (arXiv:2112.13550)[Being submitted to *Nature Physics*]

[2]YI Weizhu, XI Wenjie, CHEN Weiqiang\*, Renormalized Mean field Theory and its Application in High Temperature Cuprate Superconductors. *Low. Temp. Phys. Lett.* 41,0059(2020) [综述][封面文章]

[3]Wei-Qiang Chen, Yong-Shi Wu, Wenjie Xi, Wei-Zhu Yi and Gen Yue, Fate of Quantum Anomalies for 1d lattice chiral fermion with a simple non-Hermitian Hamiltonian. (arXiv:2010.09375) [Accepted by *Journal of High Energy Physics*]<sup>②</sup>

[4] Wei-Zhu Yi, Yong-Ju Hai, Rong Xiao, and Wei-Qiang Chen\*, Exceptional entanglement in non-Hermitian fermionic models. (arXiv:2304.xxxxx) [being submitted to *SciPost Phys.*]

---

① \* 为通讯作者

② 遵循高能物理领域惯例，作者按照姓氏首字母排序。

### 其他（非研究生阶段）学术成果

[1]Qiu-Shi Wang, Bin Zhang, Wei-Zhu Yi et al., Impurity Effects at Surfaces of a Photon-Dressed Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub> Thin Film. *Chin. Phys. Lett.* 35 107201

[2]W. Z. Yi, Q. S. Wang, R. Wang, B. G. Wang Possible particle-hole instabilities in interacting Type II Weyl semimetals. (arXiv:1707.09576) [being submitted to *Phy. Rev. B*]